STERRENKUNDE

STUDIEMAP OP VWO NIVEAU

Weer- en Sterrenkundige Kring Zaanstreek

STERRENKUNDE

STERRENKUNDE

STUDIEMAP OP VWO-NIVEAU

2017-1

Uitgave ter gelegenheid van het 50-jarig bestaan van de

Weer- en Sterrenkundige Kring Zaanstreek

Hoe wetenschap werkt...

1967-2017 - vijftig jaar wetenschapsvoorlichting uit de eerste hand

COLOFON

UITGAVE
Weer- en Sterrenkundige Kring Zaanstreek

TITEL
STERRENKUNDE - studiemap op VWO-niveau

REDACTIE
Jan de Jong

OPMAAK EN PRODUCTIE
Jan de Jong

Voorwoord

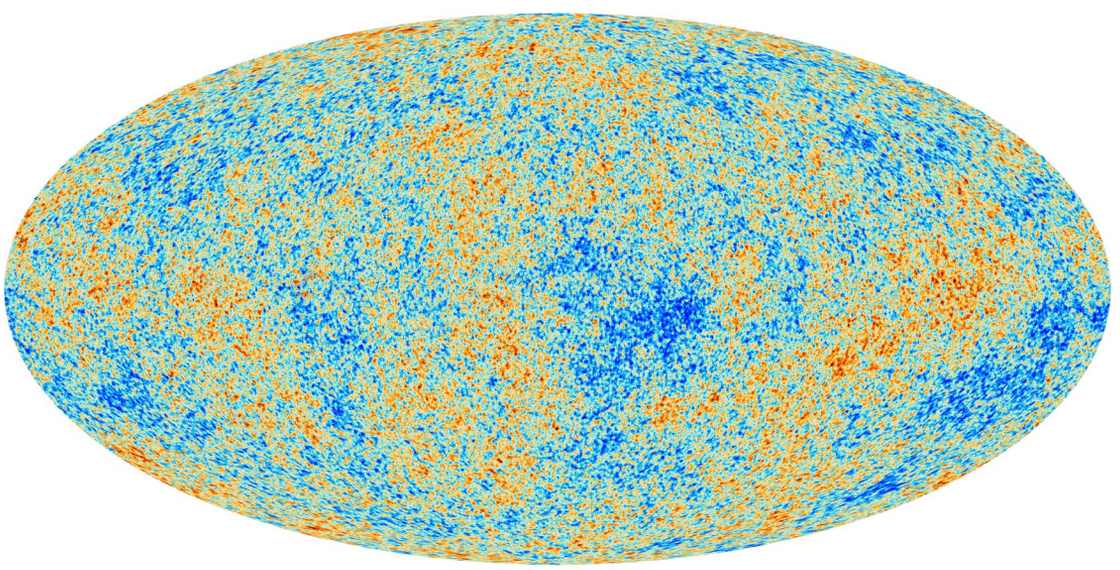
In het Nederlands taalgebied zijn voor een eerste kennismaking met de sterrenkunde voortreffelijke boeken beschikbaar. In die boeken ligt de nadruk op de resultaten van het onderzoek, we leren hoe het zonnestelsel is opgebouwd en wat we in het heelal kunnen vinden. Maar hoe is de wetenschap tot die resultaten gekomen? Om dat te kunnen volgen is kennis van de natuurkunde onontbeerlijk. Een boek in het Nederlands waarin natuurkunde wordt gebruikt op VWO-niveau en dat de actuele stand van de astronomische wetenschap beschrijft ontbrak echter. Er wordt wel eens beweerd dat iedere formule de oplage halveert. Voor een echt begrip zijn formules echter onmisbaar.

Deze studiemap is uitgegeven door de **Weer- en Sterrenkundige Kring Zaanstreek**. Deze vereniging bestaat in 2017 50 jaar en deze jubileumuitgave is daarbij een passend geschenk voor de leden.

Deze map is samengesteld uit verschillende bronnen (zie bronvermelding). Het is een losbladige uitgave. Dit heeft als groot voordeel dat jaarlijks verbeterde bladen en uitbreidingsbladen kunnen worden ingevoegd. Zo blijft de inhoud actueel en in de pas met de snel groeiende kennis op astronomisch gebied.

Deze uitgave is ook in een digitale vorm (PDF bestand) beschikbaar.

De redactie wenst u veel studieplezier!



In den beginne...

BRONVERMELDING

Wat zien we aan de hemel?

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

De ontwikkeling van ons wereldbeeld

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

Zwaartekracht en de moderne astronomie

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

Afleiding van de wetten van Kepler

Carroll, Bradley W., en Ostlie, Dale A., An Introduction to Modern Astrophysics

De eigenschappen en het ontstaan van het zonnestelsel

Dr. Rien Dijkstra

Meten aan sterren

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

De structuur van sterren

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

De levensloop van sterren

Een algemene inleiding in de Astronomie, uitgave van de Nederlandse Onderzoeksschool voor Astronomie

Compacte sterren

Module Levensloop van sterren. Strijd tegen de zwaartekracht. Junior College Utrecht i.s.m. Sterrenkundig Instituut Utrecht 2009

Supernova's: sterexplosies en wat er van over blijft

Module Levensloop van sterren. Strijd tegen de zwaartekracht. Junior College Utrecht i.s.m. Sterrenkundig Instituut Utrecht 2009

Zwarte gaten

Module Levensloop van sterren. Strijd tegen de zwaartekracht. Junior College Utrecht i.s.m. Sterrenkundig Instituut Utrecht 2009

Bijlage 1 Vectoren

Jan de Jong

Bijlage 2 Astronomische en fysische constanten

Carroll, Bradley W., en Ostlie, Dale A., An Introduction to Modern Astrophysics

INHOUDSOPGAVE

Wat zien we aan de hemel?

1 De sterrenhemel 1
1.1 De hemelbol 4
2 De zon en de maan 7
2.1 De maanfasen 7
2.2 Verduisteringen 7
2.3 Maansverduisteringen 8
2.4 Zonsverduisteringen 11
3 Planeetbewegingen aan de hemel 14
4 Andere hemellichamen waarneembaar met het blote oog 15
5 Oefeningen 16

De ontwikkeling van ons wereldbeeld

1 Inleiding 1
2 De wetenschap en zijn methoden 1
3 Van geocentrisme naar heliocentrisme 3
3.1 Het Griekse geocentrische wereldbeeld 4
3.2 De eerste stap van de kosmische ladder: Parallax 5
3.3 Het heelal van de sferen 9
3.4 Het heliocentrisch wereldbeeld 11
4 De wetten van Kepler 17
4.1 De eerste twee wetten van Kepler 19
4.2 De derde wet van Kepler 20
5 Conclusie 21
6 Oefeningen 22

Zwaartekracht en de moderne astronomie

1 Inleiding 1
2 Galileo Galilei en zijn telescoop 1
2.1 De fasen van Venus 4
3 Newton en zijn bewegingswetten 5
3.1 Newton en de wetten van Kepler 8
4 Newton voorbij 13
4.1 De algemene relativiteitstheorie 13
4.2 Bewijzen voor de algemene relativiteitstheorie 14
5 Conclusie 17

Afleiding van de wetten van Kepler

1 Inleiding 1
2 Het referentiestelsel van het massamiddelpunt 1
3 De afleiding van Kepler's eerste wet 6
4 De afleiding van Kepler's tweede wet 9
5 De afleiding van Kepler's derde wet 11

De eigenschappen en het ontstaan van het zonnestelsel

Inleiding 1
1 De eigenschappen van ons zonnestelsel 1
1.1 Het zonnestelsel in vogelvlucht 1
1.1.1 De zon 1
1.1.2 Planeten en dwergplaneten 4
1.1.3 Manen 12
1.1.3.1 Getijdenwerking 12
1.1.4 Asteroïden 15
1.1.5 Kometen 19
1.1.6 Gas en stof 21
1.2 Planeeteigenschappen 22
2 De vorming van ons zonnestelsel 25
2.1 Leeftijd van ons zonnestelsel 25
2.2 Dynamica van ons zonnestelsel 27
2.3 De zonnenevelhypothese 28
2.4 De vorming van planeten 28
2.5 Chemie van het zonnestelsel 30
2.6 Exoplaneten 31

Meten aan sterren

1 Inleiding 1
2 Lichtkracht 1
3 Oppervlaktetemperatuur van sterren 4
4 De grootte van sterren 9
5 Hertzsprung-Russell (HR) diagrammen 11
5.1 De tweede stap van de kosmische ladder: afstandsbepaling met het HR-diagram 13
5.2 De derde stap van de kosmische ladder: Magellaense wolken en Cepheïden 15
6 De laatste stap van de kosmische ladder: De wet van Hubble 17
7 Conclusie 19

De structuur van sterren

1 Inleiding 1
2 Sterren: gasbollen in evenwicht 1
2.1 Hydrostatisch evenwicht 1
2.2 Energie-evenwicht 3
3 Kernfusie 6
3.1 Voorwaarden voor kernfusie 6
3.2 Energieproductie door kernfusie 7
3.3 Waterstoffusie in meer detail 8
3.4 Heliumfusie 10
4 De levensduur van sterren 11
4.1 De levensduur van de zon 11
4.2 De levensduur van andere sterren 13
4.3 Leeftijdbepaling van sterren in sterrenhopen 14
5 Conclusie 17

De levensloop van sterren

1 Inleiding 1
2 Het ontstaan van sterren 2
3 De levensloop van de zon en andere lichte sterren met M<8 $M_\odot$ 5
3.1 De hoofdreeksfase 5
3.2 De rode-reusfase: het begin van het einde 6
3.3 De latere evolutiefasen: heldere rode reuzen 7
3.4 Witte dwergen: de overgebleven pitten van dode sterren 9
4 De levensloop van zware sterren 11
4.1 Het einde van zware sterren 12
4.2 Neutronensterren en zwarte gaten 13
5 Waarnemingen: een nieuwe ster in het oude China en de Krabnevel 14
6 Zwarte gaten 16
6.1 Wat is ontsnappen aan de gravitatiekracht 17
6.2 De ontsnappingssnelheid van een zwart gat 20
7 De cyclus is rond 21
7.1 Kosmische recycling 21

Vorming en ontwikkeling van compacte sterren

1 Inleiding 1
2 De theorie: van lichte ster naar witte dwerg 2
3 Waarnemingen aan witte dwergen 6
4 De theorie: van zware ster tot neutronenster 7
4.1 Waarnemingen voorspeld 8
5 Waarnemingen: een nieuwe ster in het oude China en de Krabnevel 9
6 Meer waarnemingen aan pulsars 12
7 Afsluiting 14

Supernova's: sterexplosies en wat ervan overblijft

1 Inleiding 1
1.1 Een nieuwe ster 1
2 Waarnemingen aan supernova's: helderheid, spectra en classificatie 3
3 Supernovatypen 9
3.1 Zware sterren en supernova's: implosies 9
3.2 Disrupties van witte dwergen: Type Ia supernova's 14
3.3 Verschillen tussen Ia en de andere typen 16
4 Supernovarestanten 17
4.1 Supernova's en de oorsprong van de elementen 17
4.2 Explosies en schokken 18
4.3 De structuur en evolutie van een supernovarestant 19
4.4 Röntgenstraling 20
4.5 Optische emissie van supernovarestanten 22
4.6 Supernovarestanten met en zonder neutronensterren 22

5 Afsluiting 23

Zwarte gaten

1 Inleiding 1
2 Wat is een zwart gat? 3
2.1 Wat is ontsnappen aan de gravitatiekracht? 3
2.2 De ontsnappingssnelheid van een zwart gat 7
3 Hoe kan een zwart gat ontstaan? 9
3.1 Stellaire zwarte gaten 9
3.2 Superzware zwarte gaten 9
4 Hoe kun je een zwart gat zien? 10
4.1 Effect van de gravitatiekracht op licht 10
4.2 Iets draait om niets 13
4.3 Materie valt naar zwart gat 14
5 Wat gebeurt er met je in de buurt van een zwart gat? 15
5.1 Cirkelen 15
5.2 Vallen 17
6 Een zwart gat als energiebron? 18
6.1 Energie in een cirkelbaan 18
6.2 Zwart gat als energiebron 18
7 Afsluiting 19
7.1 Niet behandeld, ook interessant 20
7.2 Extra opdrachten 21

Bijlagen

Bijlage 1 Vectoren

1 Wat is een vector? 1
2 Eenheidsvectoren 3
3 Plaatsvectoren en afgeleiden 4
4 Het vectorieel inproduct 5
5 Het vectorieel uitproduct 6
6 Overzicht vector productregels 7

Bijlage 2 Astronomische en fysische constanten

Wat zien we aan de hemel?

In dit hoofdstuk maken we een reis langs de hemel om een aantal verschijnselen te bekijken die we met het blote oog kunnen waarnemen.

Wat kunnen we zien aan de hemel? Belangrijke vragen hierbij zijn:

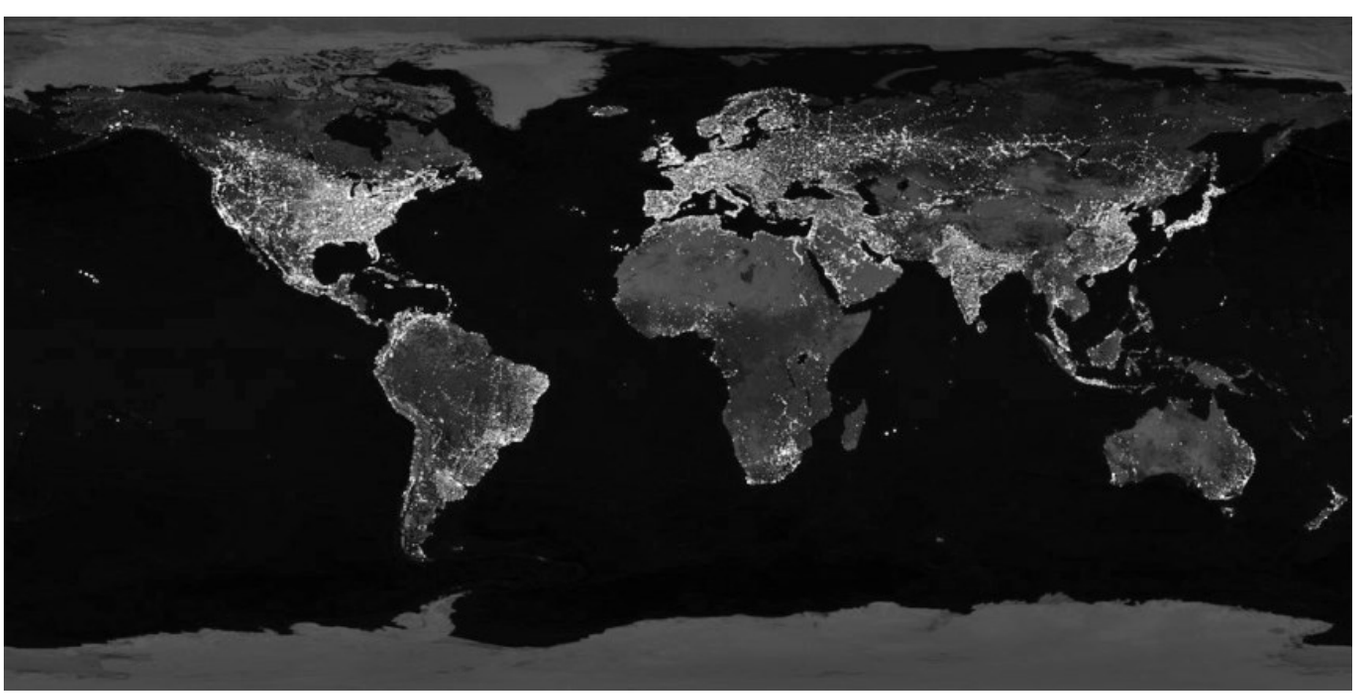
- Welke *informatie* krijgen we, uit wat we zien, over onze plaats in het heelal?
- Waarom bewegen sommige sterren op een *bijzondere manier* langs de hemel?
- Verandert de sterrenhemel in de *tijd*?
- Wat zijn sterren? Hoe ontstaan ze en wat gebeurt er verder met ze?

Voordat we deze vragen in de volgende hoofdstukken kunnen beantwoorden moeten we er eerst achter komen wat we nu eigenlijk zien.

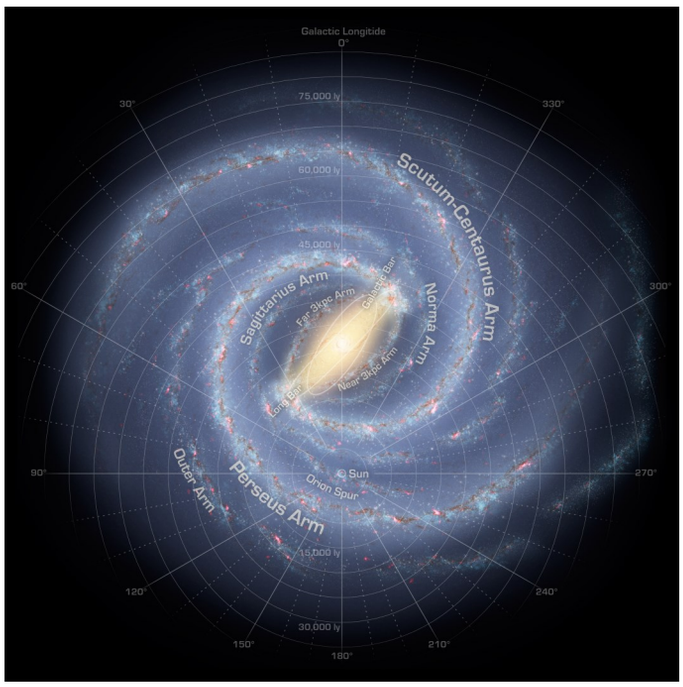
1 De sterrenhemel

Lichtvervuiling = licht van steden e.d. dat er voor zorgt dat de hemel niet helemaal donker meer is.

In onze moderne wereld zijn er maar weinig mensen die kunnen ontsnappen aan het licht van de stad en onder een heldere hemel kunnen genieten van een onverstoorde sterrenhemel. In Europa is het vrijwel onmogelijk om nog plaatsen te vinden waar er geen sprake is van *lichtvervuiling* door o.a. steden en industrie (zie fig. 1).



Figuur 1: De lichtvervuiling op aarde.



Figuur 2: Een schematische voorstelling van de Melkweg. Onze zon bevindt zich aan de buitenrand. Als we in de richting van de schijf kijken zien we de band langs de hemel. Zie ook fig. 3. Kijken we uit de schijf dan zien we veel minder sterren.

Gelukkig hadden onze voorouders wel de tijd en de mogelijkheden om dit te doen. De hemel op een heldere, onbewolkte nacht is een fantastisch gezicht, en dit was in vroeger tijden dan ook een populaire tijdsbesteding. Wanneer onze ogen zich aanpassen aan het duister, dan zien we een overvloed aan twinkelende sterren, van zwak tot sterk, van eenzame sterren tot grote groepen van sterren die bij elkaar lijken te horen. Wat verbazend is, is dat ieder stipje een ster is als onze zon, aangedreven door dezelfde processen. De samenstelling van de zon en hoe zijn gigantische energieproductie werkt is eeuwenlang een mysterie geweest, maar nu denken we dat de zon een bol is die vooral bestaat uit waterstof en helium, en dat zijn energie komt van kernreacties in het hart van de zon. Als je nu 's avonds naar de hemel kijkt, probeer je dan eens voor te stellen dat ieder stipje een zon is, en bedenk dan eens hoe ver deze sterren moeten staan om ze zo zwak te zien.

Hoeveel sterren zijn er in het heelal?

Melkweg = een grote groep sterren die door hun onderlinge zwaartekracht bij elkaar blijven. De zon is één van deze sterren.

Ongeveer 5.000 sterren kunnen we zien met het blote oog. Met telescopen zijn er meer dan 100.000.000.000 (100 miljard) sterren te zien, alleen al in de grote schijf die we zien langs de hemel, de *Melkweg*. Met de Hubble Space Telescope zijn foto's gemaakt van kleine stukjes hemel waarop enkele duizenden sterrenstelsels, vergelijkbaar met onze eigen melkweg, zichtbaar zijn. Er zijn waarschijnlijk 10^{10}-10^{12} van deze sterrenstelsels. De huidige schatting van het aantal sterren in het heelal ligt ergens tussen de 10^{22} en 10^{24} sterren. (Om een idee te hebben: dat zijn er meer dan er zandkorrels op aarde zijn).

Figuur 3: Pas als we weten wat we zien als we naar de Melkweg kijken kunnen we beseffen hoe nietig wij zijn in het heelal. Toch is de mens, met zijn bewustzijn van het universum, waarschijnlijk de meest wonderlijke vorm waarin de materie zich in het heelal manisfesteert. De filosoof Immanuel Kant verwoordde het zo: “Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt: Der bestirnte Himmel über mir, und das moralische Gesetz in mir”.

1.1 De hemelbol

De zon komt op in het oosten, en gaat onder in het westen. Ook de sterren komen op in het oosten en gaan onder in het westen. Dat kun je met eigen ogen zien! Kijk maar eens aan de hemel waar bepaalde sterren staan en kijk een half uur later weer. Je zult zien dat de sterren verplaatst zijn. Het lijkt wel of de sterren aan een hemelbol vastzitten, die in één etmaal (24 uur) om zijn as draait (fig. 4). Eén ster, de *Poolster*, lijkt wel op zijn plaats te blijven staan. Dit komt omdat deze ster zich recht boven de rotatie-as van de hemelbol bevindt. Deze ster wijst je dus altijd het noorden aan!

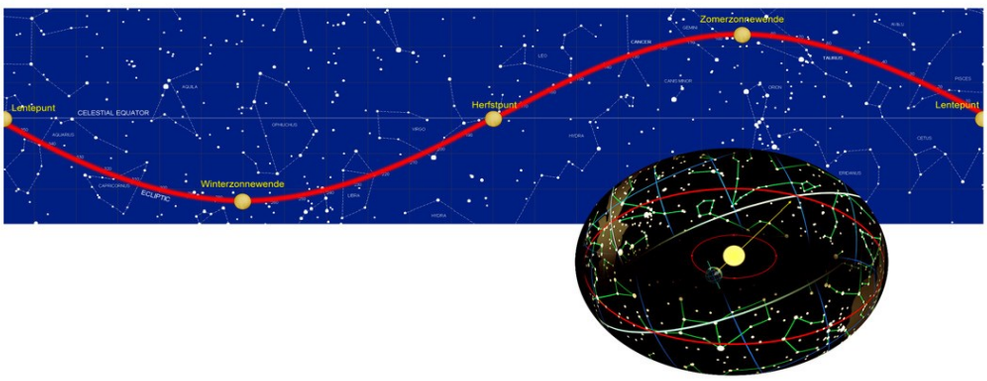
Poolster

Figuur 4: Stersporen boven ESO observatorium, Chili. Door de camera een tijd open te laten staan zie je de beweging van de sterren. De poolster is hier niet te zien omdat dit het zuidelijk halfrond is.

Opgave 1: verwerking: Stersporen

Schat de belichtingstijd van de foto in figuur 4.

Net als de sterren lijken ook de zon en de maan om de aarde te bewegen. Als we een paar dagen naar de zon kijken, dan kunnen we concluderen dat de zon gelijk op beweegt met de sterren. Maar als we goed kijken, direct na zonsondergang, dan zien we dat de sterren in de loop van de weken langzaam van positie lijken te veranderen ten opzichte van de zon. We kunnen dit laten zien door de sterren op een kaart te zetten, en te kijken welke sterren we net na zonsondergang en net voor zonsopgang zien. De zon bevindt zich dan tussen deze twee groepen sterren in. Als we dit doen zien we dat de zon naar het oosten lijkt te bewegen ten opzicht van de sterren. Dus het lijkt of de zon om de aarde beweegt maar niet zo snel als de sterren. Zie fig. 5.



Figuur 5: Beweging van de zon door het jaar heen langs de sterrenhemel.

Hoe lang duurt het tot de zon weer op dezelfde plek staat?

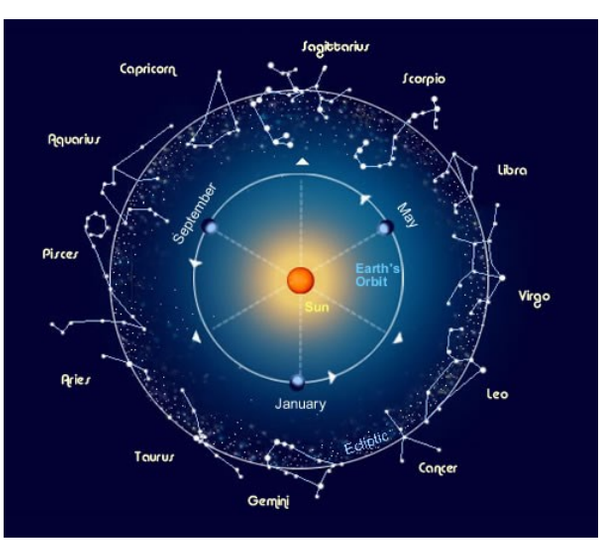
Dit zou je kunnen bepalen door te kijken wanneer dezelfde sterren weer zichtbaar zijn na zonsondergang. Je zou na een aantal cycli concluderen dat deze periode 365,25 dagen is en dat dit exact overeenkomt met de loop van de seizoenen. Zo zijn we aan ons jaar gekomen. Omdat het 365,25 dagen en niet 365 dagen is hebben we elke vier jaar een schrikkeljaar (extra dag in februari) om toch weer op hele dagen uit te komen. In de vroege geschiedenis zagen mensen al dat dezelfde sterpatronen terugkwamen bij bepaalde seizoenen. Zo kon men al, zonder kalender, seizoenen voorspellen en hier bijvoorbeeld de oogsten op afstemmen.

Dus voor een waarnemer op aarde lijkt de zon ieder jaar weer hetzelfde pad te volgen. Fig. 5 laat een band zien van 30 ° aan beide zijden van de *hemelequator*. Dit is de lijn die recht boven de evenaar van de aarde ligt. Het pad dat de zon volgt lijkt op en neer te bewegen langs de equator. Dit pad noemen we de *ecliptica*. (Deze naam komt van het feit dat zons- en maansverduisteringen (eclipsen) alleen optreden wanneer de maan zich op of rond deze lijn bevindt). De sterrenbeelden waardoor de zon beweegt noemen we de tekens van de *dierenriem* (zie fig. 6).

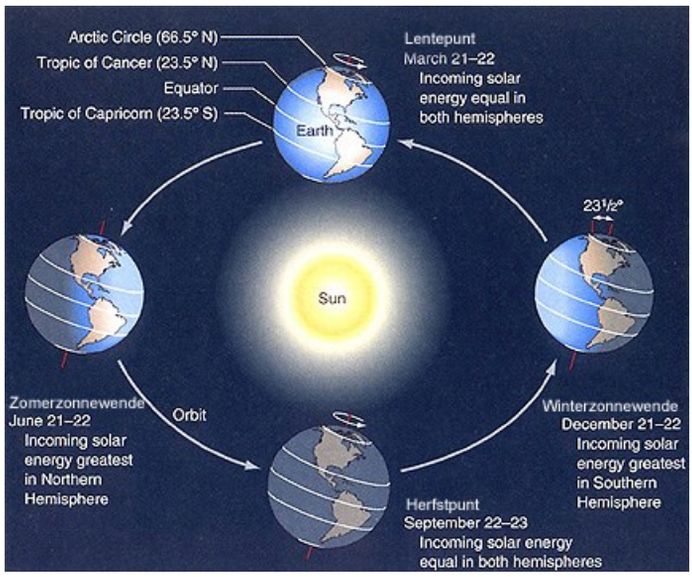
hemelequator

ecliptica

dierenriem = de 12 sterrenbeelden waar de zon in één jaar doorheen lijkt te bewegen



Figuur 6: De sterren waardoor de zon lijkt te bewegen, de zgn. dierenriem.



Figuur 7: De gekantelde rotatie-as van de aarde zorgt voor de seizoenen. Vergelijk de zomer- en winterzonnewende met die in figuur 5.

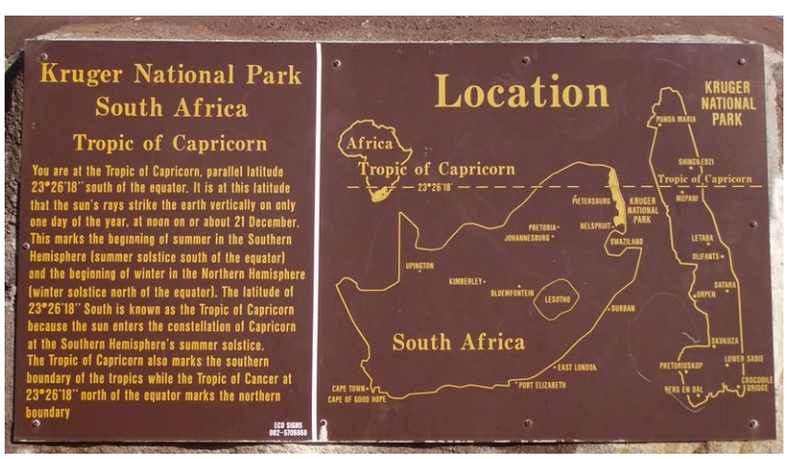
Je ziet dat de zon schijnbaar niet recht over de evenaar beweegt, maar er soms boven en soms beneden zit. Dit komt doordat de rotatie-as van de aarde niet loodrecht staat op het baanvlak van de aarde, maar er een hoek mee maakt van ongeveer 67 °. Ten opzichte van de sterren blijft de rotatie-as tijdens de omwenteling om de zon dezelfde kant op staan (fig. 7). Het gevolg is dat wij *seizoenen* kennen.

seizoenen

Op 21 juni komt de zon op zijn hoogste punt ten noorden van de evenaar. De zon staat dan loodrecht boven de zogenaamde *Kreeftskeerkring*[1]. De dag op het noordelijk halfrond duurt het langst, en het is *zomerzonnewende* .

Kreeftskeerkring

zomerzonnewende



Figuur 8: In Zuid-Afrika kun je over de Steenbokskeerkring rijden.

Op de *winterzonnewende* (21 of 22 december) staat de zon het verst naar het zuiden en is de dag op het noordelijk halfrond het kortst, het is nu dus zomer op het zuidelijk halfrond. De zon staat dan boven de *Steenbokskeerkring*[2] (fig. 8). Daar tussenin, rond 21 maart en 23 september, staat de zon precies recht boven de evenaar. Dan duren dag en nacht even lang: dat noemen we de equinox. (Equinox is Latijn voor: gelijke nacht.)

winterzonnewende

Steenbokskeerkring

equinox

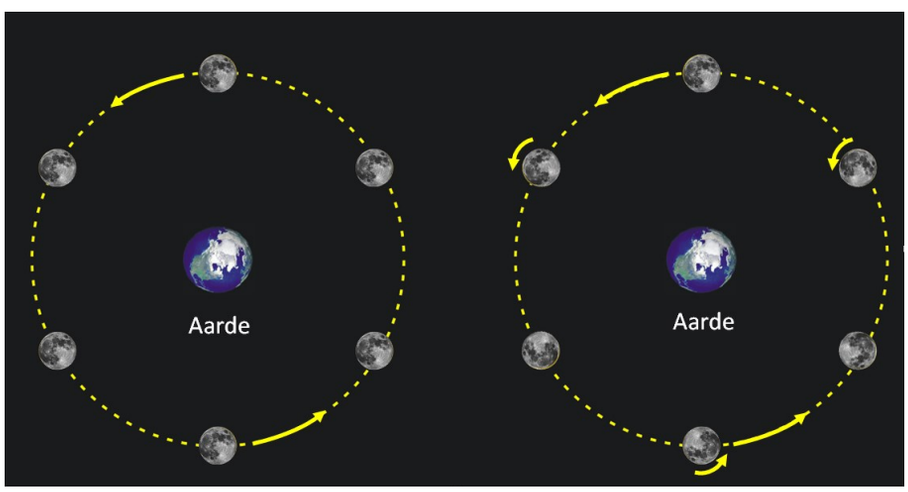
[1] de lijn op 23,5 ° NB waar de zon op de midzomer recht boven staat.

[2] de lijn op 23,5 ° ZB waar de zon op de midwinter recht boven staat.

2 De zon en de maan

2.1 De maanfasen

Net zoals de zon en de sterren lijkt ook de maan om de aarde te draaien. Als je goed kijkt zie je dat je altijd hetzelfde beeld van de maan ziet (het gezicht van de maan). Je zou geneigd zijn om dus te zeggen dat de maan niet draait terwijl hij om de aarde beweegt, maar dit is niet waar. De maan moet terwijl hij om de aarde draait ook 1x om zijn as draaien (fig. 9) om altijd dezelfde kant te laten zien. Het feit dat de rotatieperiode van de maan zelf en de periode dat hij om de aarde draait hetzelfde is is trouwens geen toeval, maar is te danken aan de universele gravitatiewet waar we later nog kennis mee maken. Als we naar de maan kijken in de loop van de maand zien we het



Figuur 9: De maan roteert terwijl hij om de aarde draait. Als dit niet zo was zou een punt niet altijd vanaf aarde zichtbaar zijn (links), maar we weten dat we de maan altijd hetzelfde zien (rechts).

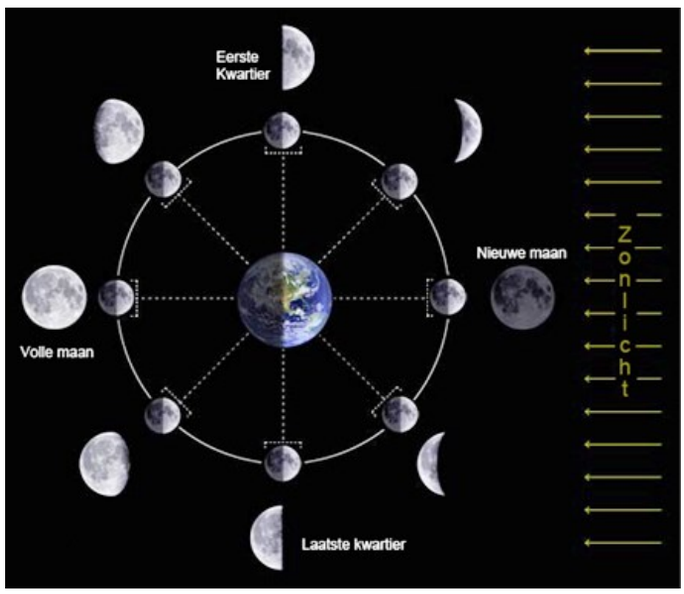
maanfasen

uiterlijk van de maan sterk veranderen. We zien de *maanfasen* (fig. 10), die al vanaf de oudheid verklaard worden door er vanuit te gaan dat dit met de positie van de maan, de zon en de aarde te maken heeft. Dit geeft dus aanwijzingen dat de maan om de aarde draait. Ook kunnen we aan de vorm van de schaduw zien dat de maan een bolvorm heeft.

2.2 Verduisteringen

"En het zal te dien dage geschieden, spreekt de Heere HEERE, dat Ik de zon op den middag zal doen ondergaan, en het land bij lichten dage verduisteren" *Amos 8:9 Oude Testament.*

Reeds in de bijbel werd melding gemaakt van een zonsverduistering. Dit zijn erg bijzondere verschijnselen die maar zelden waargenomen kunnen worden, het is daarom ook dat dit soort verschijnselen vaak zijn vermeld in oude geschriften. De hier genoemde verduistering is teruggeleid tot een verduistering die plaatsvond op 15 juni 763 v. Chr.



Figuur 10: De maanfasen zoals we die vanaf de aarde kunnen zien. Dit wordt veroorzaakt doordat de maan vanaf verschillende kanten belicht wordt door de zon.

Deze datum is bovendien bevestigd door een Assyrisch geschrift dat bekend staat als het Eponym Canon. Hier wordt vermeld: "*Opstand in de stad Assur, in de maand Sivan. De Zon werd verduisterd*."

Astrologen die in vroeger tijden deze verduisteringen konden voorspellen waren dan ook vaak zeer machtig, aangezien aan deze verduisteringen hemelse machten werden toegekend.

Wat zijn nu zons- en maansverduisteringen? En waarom zijn zonsverduisteringen zo zeldzaam, terwijl maansverduisteringen vrijwel iedere twee jaar te zien zijn?

2.3 Maansverduisteringen

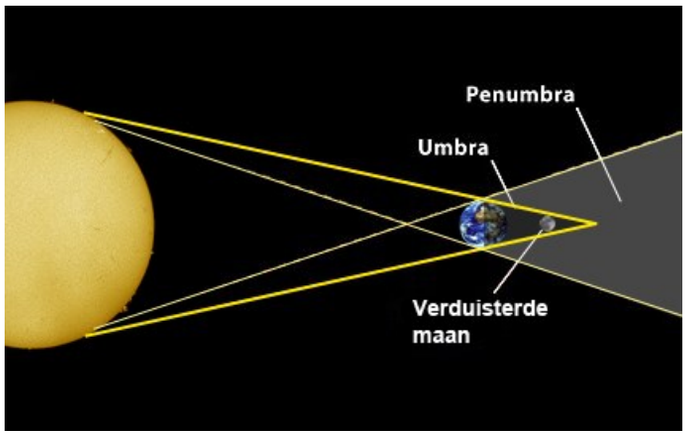
maansverduistering

Tijdens zijn omloop om de aarde komt de maan soms in de schaduw van de aarde terecht. Dit noemen we ook wel een *maansverduistering*. Dit gebeurt echter niet tijdens elke omloop. Waarom niet? Hier zijn een aantal redenen voor te noemen, namelijk:

- De zon en de maan zijn klein vergeleken bij hun afstand tot de aarde. De maan is zo'n 30 aarddiameters van ons vandaan. Dus het is vrij onwaarschijnlijk dat ze zo precies op één lijn staan dat de aarde de maan afschermt van de zon. Vergelijk het maar met een grapefruit in de zon en een ping-pong bal op zo'n 4 meter afstand die je in de schaduw van de grapefruit wil leggen.

umbra

- De kernschaduw van de aarde (ook wel de *umbra* genoemd) loopt uit in een punt die van de zon afgericht is (zie fig. 11). In deze richting is dus de umbra kleiner dan de aarde. Dit is omdat de bron van het licht, de zon, vele malen groter is dan de aarde. Op de afstand van de maan tot de aarde is de umbra nog maar ¾ van de aarddoorsnede.



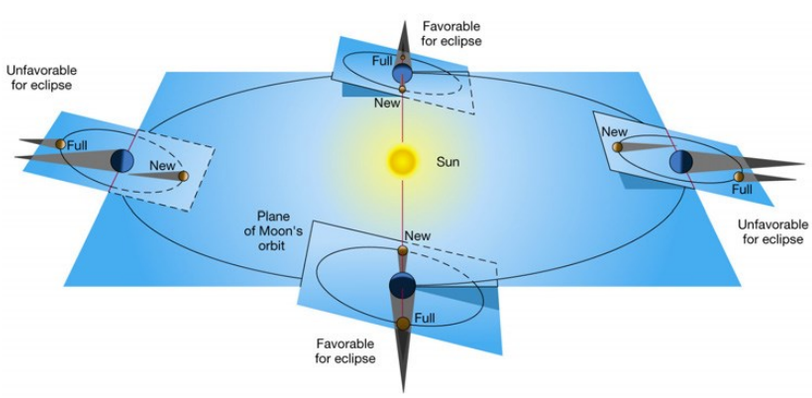
Figuur 11: De maan tijdens een maansverduistering. Duidelijk zichtbaar zijn de kernschaduw (umbra) en bijschaduw (penumbra).

penumbra

- De maan kan zich ook in de bijschaduw (*penumbra*) van de aarde bevinden. Dan wordt maar een gedeelte van het zonlicht door de aarde tegengehouden. De penumbra is het meest donker dicht bij de umbra en wordt steeds lichter naar buiten toe. Als de maan aan de buitenkant van de penumbra passeert is er vrijwel niets te zien van een eventuele verduistering.

eclipsseizoenen

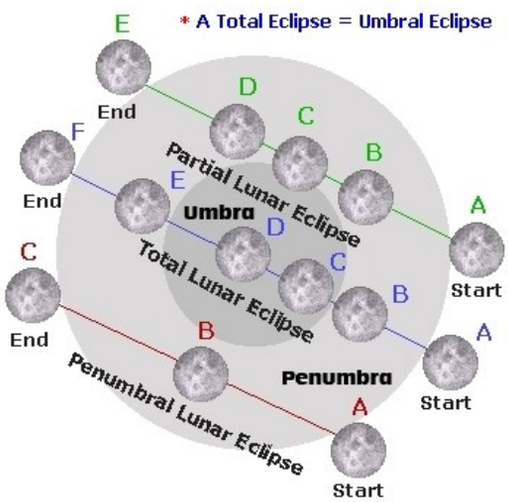
- De belangrijkste factor die ervoor zorgt dat, in tegenstelling tot wat je zou verwachten, er niet iedere omloop een verduistering optreedt, is de hoek die het baanvlak van de maan maakt met het baanvlak van de aarde. Deze hoek wordt de tilt genoemd. De tilt van de baan is ongeveer 5°. Dit betekent dat de schaduw van de aarde soms boven of onder de baan van de maan terechtkomt (zie fig. 12). De twee perioden waarin de schaduw de maan kan raken noemen we ook wel de *eclipsseizoenen* die ieder jaar optreden. Dus maansverduisteringen kunnen maar in twee korte perioden per jaar voorkomen. Doordat de gehele maan door de schaduw beweegt, is de verduistering echter vrijwel vanaf de gehele aarde waar te nemen. Dit type verduistering komt dus redelijk vaak voor (ongeveer 1x per twee jaar) voor een willekeurige plaats op aarde.



Figuur 12: De tilt van de baan van de maan om de aarde zorgt ervoor dat de schaduw van de aarde niet altijd op de maan valt.

Typen maansverduisteringen

De maan kan dus op een aantal manieren door de schaduw van de aarde gaan, en dit zorgt voor verschillende soorten verduisteringen. In fig. 13 worden de verschillende soorten verduisteringen getoond, namelijk:



Figuur 13: De verschillende soorten maansverduisteringen.

penumbrale maansverduistering

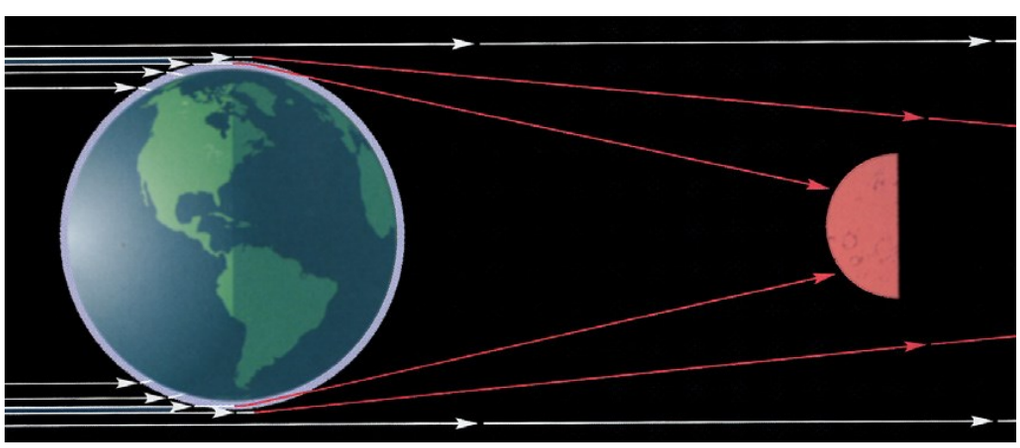
- Een *penumbrale maansverduistering* waarbij de maan alleen maar door de penumbra beweegt. Deze is te zien doordat de maan iets donkerder wordt dan normaal.

gedeeltelijke maansverduistering

- Een *gedeeltelijke maansverduistering* waarbij de maan half door de umbra gaat. Je ziet dit doordat de maan maar voor een deel donkerrood van kleur wordt.

totale maansverduistering

- Een *totale maansverduistering* waarbij de maan volledig door de umbra gaat. Hierbij blijft de maan slechts zichtbaar als een donkerrode schijf. Een dergelijke verduistering kan maximaal zo'n 1,5 uur duren.



Figuur 14: De rode kleur van de maan komt door de buiging van het zonlicht door de aard-atmosfeer. Het blauwe licht wordt het meest verstrooid en komt niet op de maan terecht. Het rode licht blijft over en dit zorgt voor de dieprode kleur tijdens de verduistering. (Dit is ook de reden waarom zonsondergangen roodgekleurd zijn en de hemel juist blauw is).

2.4 Zonsverduisteringen

zonsverduistering

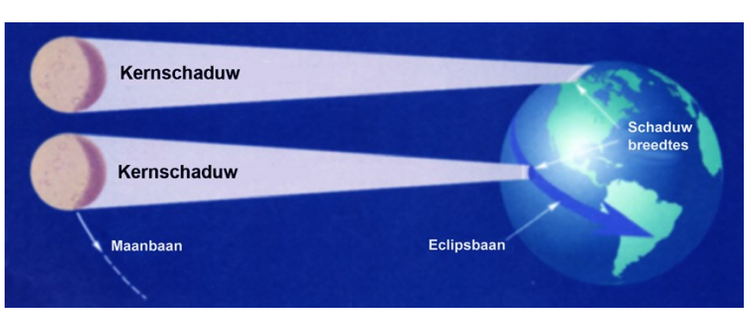
We hebben gezien dat een maansverduistering optreedt wanneer de maan door de schaduw van de aarde beweegt. Een *zonsverduistering* treedt op wanneer de maan precies tussen de aarde en de zon door beweegt, zodat de maanschaduw op de aarde valt. Er is echter een wezenlijk verschil tussen zons- en maansverduisteringen. De grootte van de aarde is zodanig dat de kernschaduw tot wel zo'n miljoen km de ruimte in gaat, en dus is hij op de afstand van de maan groot genoeg om de gehele maan te bedekken. De kernschaduw van de maan komt echter maar zo'n 377.000 km ver van de maan af. Vergelijk dit met de afstand van de aarde tot de maan (384.000 km) en je begrijpt dat de schaduw van de maan dan nooit op de aarde zou kunnen vallen. De maan bevindt zich echter niet in een zuiver cirkelvormige, maar in een iets langgerekte (ellipsvormige) baan. Hierdoor varieert de afstand van de maan tot de aarde tussen de 356.400 en 406.700 km. Dus soms komt de maan dichtbij genoeg om een schaduw op de aarde te laten vallen. Wanneer dit gebeurt zien we één van de meeste spectaculaire natuurverschijnselen, een *totale zonsverduistering* (zie fig. 15).

totale zonsverduistering

Figuur 15: Opname van de zonsverduistering van 11 augustus 1999 in Noord-Frankrijk.

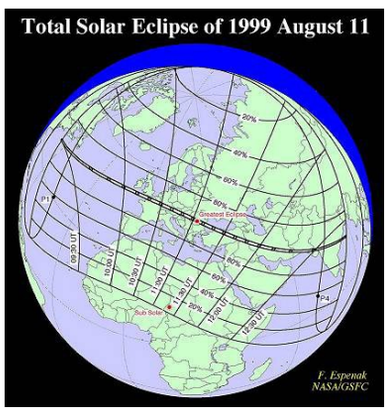
De maximale breedte van de schaduw die op de aarde valt, wanneer de maan het dichtst bij de aarde is, is ongeveer 130 km. Dit betekent dat er maximaal een gebied van zo'n 400 km in de schaduwzone kan vallen, afhankelijk van de plaats waar de schaduw op de aarde valt (zie fig. 16). Dit gebied noemen we de *totale eclipszone*.

totale eclipszone

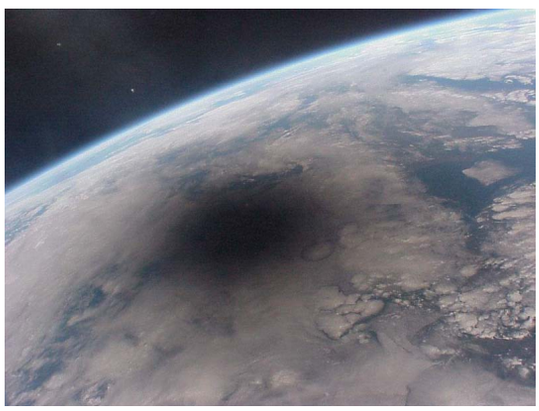


Figuur 16: de breedte van de eclipszone tijdens een zonsverduistering is afhankelijk van de plaats waar de schaduw op de aarde valt.

Dit verklaart waarom zo weinig mensen ieder jaar een gehele zonsverduistering kunnen zien. Terwijl de maan langs de hemel beweegt zwiept de schaduw over de aarde. De strip die zo gevormd wordt kan duizenden kilometers lang zijn, en je moet je in deze smalle strook bevinden om de gehele verduistering te kunnen zien (fig. 17). De gehele verduistering duurt dan maximaal zo'n 7,5 minuten.



Figuur 17: Overzicht van de eclipszone van de zonsverduistering van 11 augustus 1999 (de donkere lijn in het midden).



Figuur 18: Opname van de zonsverduistering van 11 augustus 1999 vanuit het MIR ruimtestation. Duidelijk is de umbra van de maan te zien.

corona

Tijdens de verduistering is het donker genoeg om sterren en planeten aan de hemel te kunnen zien staan. Rondom de zon is de gloeiende buitenste atmosfeer, de *corona* te zien (zie fig. 15). Dit is een gaslaag van enkele miljoenen km dik, die zich uitstrekt boven het oppervlak van de zon. Door de hoge temperatuur gloeit deze gaslaag, maar normaal gesproken kun je dat niet zien doordat dit licht veel zwakker is dan het licht dat rechtstreeks van de zon af komt. Een totale eclips is werkelijk een zeer bijzondere ervaring en als je ooit de kans hebt om er een op te zoeken is dat zeker aan te raden. De eerstvolgende totale verduistering in Nederland is pas in 2135, dus je zult wel een stukje moeten reizen. Een overzicht van wanneer er verduisteringen plaatsvinden is te vinden in fig. 19.

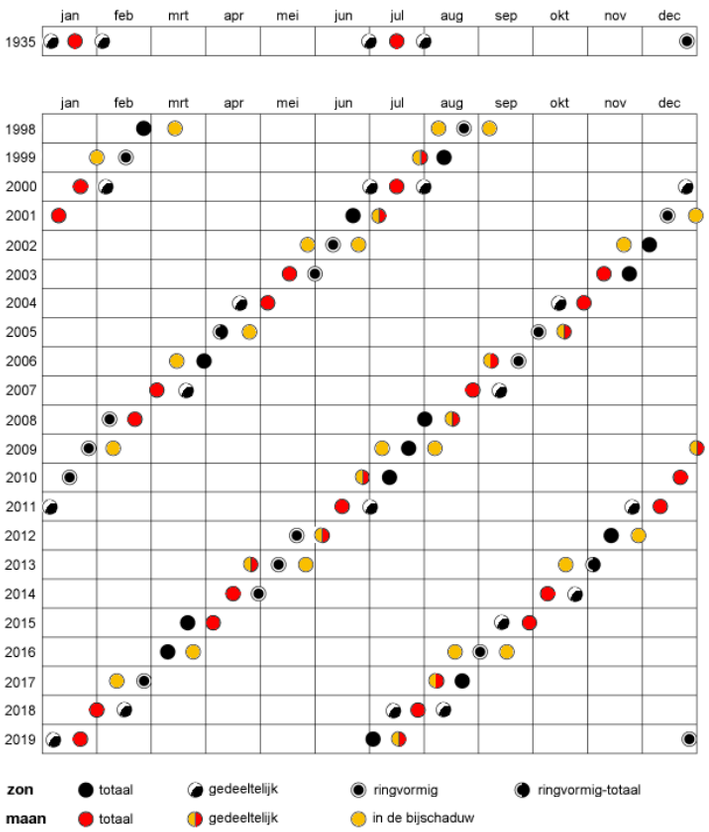
Er kunnen nog twee soorten zonsverduisteringen plaatsvinden, namelijk:

gedeeltelijke zonsverduistering

- een *gedeeltelijke zonsverduistering.* Deze zie je wanneer je je niet in de kernschaduw, maar in de bijschaduw van de maan bevindt. Het gebied waarin deze verduistering te zien is is vele malen groter dan de totale eclipszone (ongeveer 3.000 km).

ringvormige zonsverduistering

- als de maan te ver van de aarde staat om de zon volledig af te dekken ontstaat er een *ringvormige zonsverduistering*. Hierbij zie je de maan voor de zon langs schuiven, maar blijft er rond de maan nog een ring van zonlicht zichtbaar (zie fig. 20).



Figuur 19: Een overzicht van alle zons- en maansverduisteringen van 1998-2018 op aarde. Duidelijk zichtbaar zijn de twee eclipsseizoenen per jaar.

Saros cycli

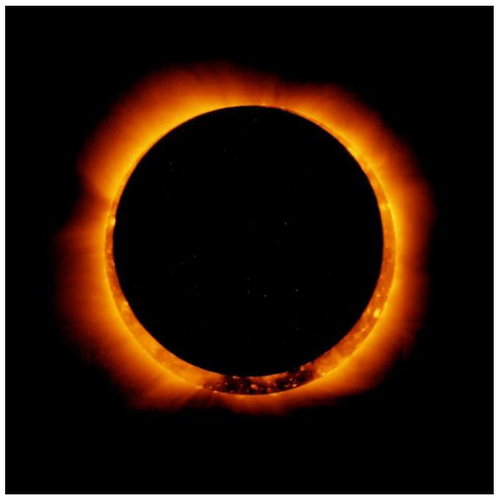
223 maanden duren vrijwel exact even lang als 18 jaar. Dat betekent dat om de 18 jaar zon, maan en aarde vrijwel dezelfde posities ten opzichte van elkaar innemen, en dat betekent op zijn beurt weer dat zons- en maansverduisteringen zich om de 18 jaar herhalen. Deze periode van 18 jaar, preciezer 6.585,3 dagen (= 18 jaar + 10 of 11 dagen), heet Saros. Dit is duidelijk te zien in fig. 19 als je bijvoorbeeld kijkt naar de jaren 1999/2017 of 1998/2016.

Als de verhouding tussen de duur van jaar en maand exact gelijk zou zijn aan de ideale verhouding 223/18, zouden de verduisteringen zich onbeperkt herhalen. Maar omdat de werkelijke jaar/maand-verhouding iets van die ideale verhouding afwijkt, treden er kleine verschuivingen op, waardoor de reeks verduisteringen uiteindelijk afbreekt.

***Saros-cyclus** = een reeks verduisteringen die zich met een periode van 18 jaar herhaalt gedurende een tijdspanne van 1.226 -1.550 jaar.*

Een reeks bij elkaar horende verduisteringen heet een *Saros-cyclus* en beslaat een tijdvak van 1.226 tot 1.550 jaar. In dit tijdvak vindt 69 tot 87 keer een eclips plaats.

De Saros was al aan de Babyloniërs bekend, met name als een beschrijving van maansverduisteringen, maar hij kan ook zonsverduisteringen voorspellen. In Griekenland ontdekten Meton en Euctemon de Saros in 432 v. Chr. Op ieder moment zijn er zo'n 40 saros-series tegelijk actief. De totale verduisteringen van 1891, 1909, 1927, 1945, 1963, 1981, 1999, 2017, 2035 en 2053 bijvoorbeeld horen allemaal tot saros-145.



Figuur 20: Een spectaculaire foto van de ringvormige zonsverduistering van 4 januari 2011 gezien vanuit de ruimte met de Hinode satelliet.

3 Planeetbewegingen aan de hemel

Tot nu toe hebben we eigenlijk alleen nog maar naar de zon en de maan gekeken, en een beetje naar de sterren. We hebben echter nog een belangrijke groep hemellichamen niet behandeld, namelijk de planeten. Met het blote oog kun je vijf planeten als stipjes aan de hemel zien, nl. Mercurius, Venus, Mars, Jupiter en Saturnus.

Het woord 'planeet' komt van het Griekse woord *πλανητης,* dat 'wandelaar' betekent, en dat is wat ze doen. Net zoals de zon en de maan bewegen de planeten door de sterren heen langs de hemelbol. De zon en de maan gaan altijd oostwaarts, maar de planeten stoppen soms midden in hun beweging, draaien van richting om en bewegen dan weer terug voor een tijdje. Ze missen de simpele beweging zoals we die van de zon en de maan kennen.

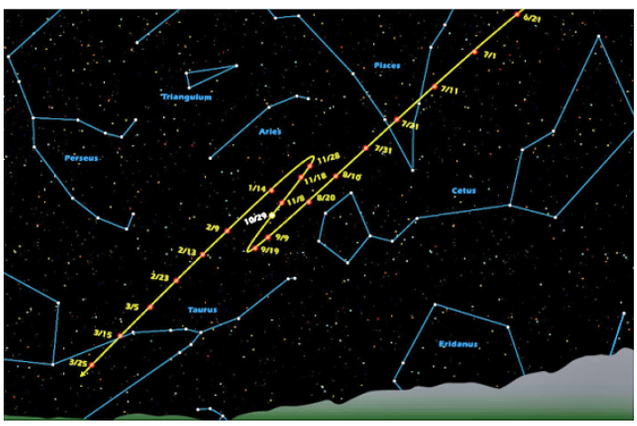
retrograde beweging

Figuur 21: Dwergplaneet Pluto - opname NASA New Horizons juli 2015.

Fig. 22 toont het pad dat Mars volgde langs de hemel in 2005. Zo'n beweging ging noemen we ook wel een *retrograde beweging*, omdat de beweging tegen de gewone richting in gaat. Deze beweging is kenmerkend voor planeten, incl. de later ontdekte planeet Neptunus en de *dwergplaneet* Pluto (fig. 21). Pluto is sinds 24 augustus 2006 officiëel geen planeet meer, maar een dwergplaneet. Dit is vanwege de nieuwe definitie die op deze datum door de Internationale Astronomische Unie is bekrachtigd, waarbij een planeet de baan waar hij zich nu ook bevindt schoongeveegd moet hebben.

Hoewel de planeten ogenschijnlijk willekeurig door de sterrenhemel bewegen, zijn er toch grenzen aan hun bewegingsvrijheid. Zo zullen ze nooit meer dan een paar graden van de ecliptica af te vinden zijn. Mercurius en Venus hebben nog een beperking. Zij zijn nooit ver van de zon vandaan te vinden. We zien ze alleen vlak na zonsondergang of vlak voor zonsopgang. Mercurius bevindt zich zelfs zo dicht bij de zon dat hij moeilijk te vinden is, zelfs als je weet waar je moet zoeken. Je zal Venus en Mercurius dus nooit midden in de nacht aan de hemel zien staan.

Een model voor de beweging van de planeten moet dus niet alleen de retrograde beweging kunnen verklaren, maar ook waarom de planeten zich vlakbij de ecliptica bevinden en waarom Venus en Mercurius zich zo bijzonder gedragen. In het volgende hoofdstuk zullen we kijken hoe hier in de loop van de eeuwen modellen voor gemaakt zijn en welk model uiteindelijk algemeen geaccepteerd is.



Figuur 22 (links) : De retrograde beweging van Mars in 2005, zoals voorspeld.

Figuur 23 (rechts): Samengestelde foto van opnames van Mars in 2005. Let ook op de verschillen in helderheid op verschillende punten van de baan.

4 Andere hemellichamen waarneembaar met het blote oog

Voor de rest zijn er natuurlijk ook nog een aantal andere hemellichamen die we waar kunnen nemen die in dit hoofdstuk niet aan bod zijn gekomen, hierbij kun je denken aan:

- Kometen, dit zijn brokstukken van ijs die zijn overgebleven bij de vorming van ons zonnestelsel. Af en toe kunnen deze dicht bij de zon komen, waardoor het ijs gaat verdampen. Zij zijn dan herkenbaar aan hun gigantische, altijd van de zon afgekeerde, staart (fig. 24). Deze staart wordt veroorzaakt door de zgn. zonnewind. Vroeger werden kometen vaak gezien als brengers van onheil.
- Vallende sterren, dit zijn minuscule rots/ijsfragmenten die verbranden in de atmosfeer van de aarde. Eigenlijk zijn dit dus helemaal geen hemellichamen.
- Nevels, dit zijn gaswolken in het heelal, die oplichten door naburige sterren, of die juist sterlicht afschermen. Deze zijn vaak erg moeilijk te zien met het blote oog. In het hoofdstuk METEN AAN STERREN zal hier meer over verteld worden.
- Supernova's, dit zijn sterren die op het eind van hun leven exploderen. Zo af en toe is er één met het blote oog te zien. In het hoofdstuk DE LEVENSLOOP VAN STERREN leren we hier meer over.

We hebben nu een beter idee gekregen over wat we zoal aan de hemel kunnen zien zonder bijzondere hulpmiddelen. In de volgende hoofdstukken gaan we nu kijken wat voor conclusies er zoal uit deze waarnemingen zijn getrokken.

Figuur 24: Een foto van Comet McNaught zoals die in 2007 met het blote oog zichtbaar was.

5 Oefeningen

Opgave 2: Maansverduistering

Zelfs op het hoogtepunt van een totale maansverduistering is de maan niet gelijkmatig belicht (zie fig. 25). Meestal is één kant van de maan veel lichter dan de andere kant. Waarom is dat zo? Wat zou er nodig zijn om de maan gelijkmatig rood gekleurd te laten zijn?

Figuur 25: Duidelijk te zien is dat de maan niet gelijk wordt belicht tijdens een totale verduistering.

Opgave 3: Maansverduistering

Een maansverduistering kan optreden wanneer

a het zonsondergang is

b alleen rond middernacht

c het zonsopgang is

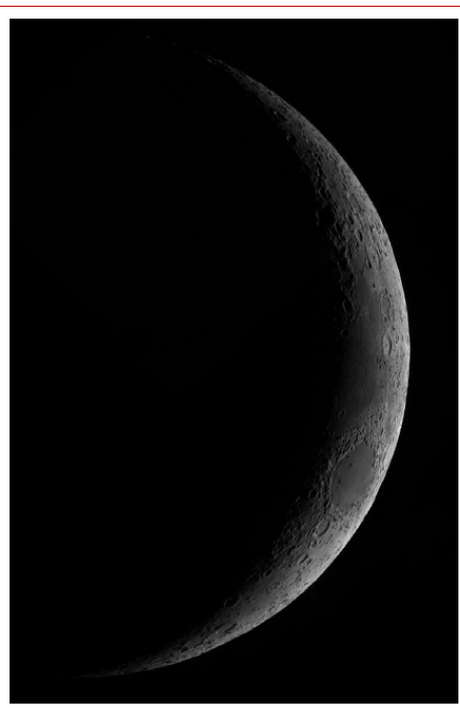
d op elke willekeurige tijd

Opgave 4: Afstanden in het zonnestelsel

Om een idee te krijgen van de afstanden in het zonnestelsel doe je de volgende oefening. Stel dat je een replica van het zonnestelsel gaat bouwen op schaal, waarbij de aarde een diameter heeft van 1 mm. (Gebruik gegevens uit deze map). Vind dan de volgende gegevens voor dit model:

a De diameter van de zon (in cm)
b De afstand van de aarde tot de maan (in cm)
c De afstand tussen de zon en de acht (!) planeten (in m)
d De afstand van de zon tot de dichtstbijzijnde ster Proxima Centauri (in km)

Zoek een kaart op van Amsterdam en teken in de kaart de posities van de planeten (en de maan), aannemend dat de zon zich op de Dam in Amsterdam bevindt.



Figuur 26: De maan twee dagen na nieuwe maan

De ontwikkeling van ons wereldbeeld

1 Inleiding

De waarnemers in vroeger tijden zagen al de verschijnselen uit het vorige hoofdstuk. Wat voor methodes zij gebruikten en wat voor conclusies zij hieruit trokken zullen wij in dit hoofdstuk verder bekijken. Het bestuderen van methoden die astronomen gebruiken betekent feitelijk het bestuderen van wetenschappelijke methoden in het algemeen. Hoewel de instrumenten die gebruikt worden voor elke vorm van onderzoek anders zijn, zijn de basisprincipes van onderzoek voor alle natuurwetenschappen gelijk. Dus we onderzoeken eigenlijk de natuurwetenschappelijke zoektocht, waarbij we zien hoe astronomen data verzamelen, hoe die data omgezet worden in theorieën, hoe theorieën met elkaar de strijd aangaan, en hoe en waarom sommige theorieën standhouden, terwijl andere verworpen worden. Dit noemen we ook wel *logisch positivisme*. Hierbij worden alleen theorieën aanvaard die gebaseerd zijn op waarnemingen.

Figuur 1: Wetenschappelijke praktijk?

logisch positivisme

2 De wetenschap en zijn methoden

Wetenschap is iets typisch menselijks. Achtergronden en cultuur van een wetenschapper spelen een grote rol bij zijn onderzoek. Dit is ook duidelijk te merken in de astronomie. Wetenschap gaat over het zoeken naar orde in de natuur en het vinden van regels die deze orde beschrijven. Wetenschap vordert door waarnemingen, experimenten en aanpassingen aan de theorie. Met onze theorieën maken we voorspellingen, terwijl onze waarnemingen en experimenten deze voorspellingen bevestigen, afkeuren of randvoorwaarden hiervoor vastleggen.

Wetenschap is een constante zoektocht naar nieuwe kennis, met de mogelijkheid om voorspellingen te maken en te testen met waarnemingen, en de mogelijkheid te hebben om ieder experimenteel resultaat te controleren en eventueel te herhalen. Leren van waarnemingen en experimenten, met als gevolg het herzien van theorieën maakt wetenschap niet zwakker, maar juist sterker.

wetenschappelijke methode

Het wordt wel gezegd dat de *wetenschappelijke methode* de beste manier is om goede wetenschap te bedrijven. Deze methode om nieuwe kennis te vergaren, te organiseren en toe te passen werd voor het eerst gebruikt in de 16e eeuw. Deze methode bestaat uit de volgende stappen:

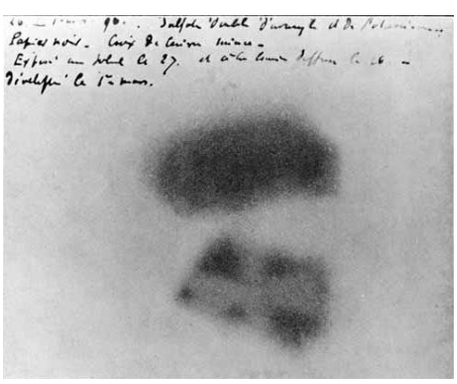
1. het herkennen van een probleem
2. een onderbouwde inschatting van de oplossing van het probleem maken, de *hypothese*

hypothese

3. het voorspellen van de gevolgen van de hypothese
4. het uitvoeren van experimenten om de voorspellingen te testen
5. het vinden van de simpelste algemene regel die de hypothese, voorspelling en uitslagen van de experimenten verzamelt in een *theorie*

theorie

De wetenschappelijke methode blijft in theorie altijd maar doorgaan, maar in de praktijk wordt deze methode niet altijd gebruikt. Zo zijn een aantal grote ontdekkingen, zoals Becquerel's ontdekking van de radioactiviteit, toevallig geweest. Kern van deze ontdekkingen is wel de continue vergelijking tussen waarnemingen en theorie.



Figuur 2: De fotografische plaat waardoor Becquerel toevallig radioactiviteit ontdekte.

Het is belangrijk te benadrukken dat een hypothese niets meer is dan een onderbouwde inschatting gebruikt om de resultaten van een experiment of waarneming uit te leggen. Een hypothese moet testbaar zijn en, in principe, weerlegbaar zijn. Een goede hypothese doet voorspellingen over de natuur die *bevestigd* of *afgekeurd* kunnen worden. Pas nadat met een serie experimenten iets aangetoond is noemen we het een wetenschappelijk *feit*.

feit

In het dagelijks leven betekent het woord feit iets vaststaands. In de wetenschap betekent het alleen maar dat er een duidelijk overeenkomst is tussen verschillende betrouwbare waarnemers over de uitkomsten van de waarnemingen van een bepaald fenomeen. Dus iets wat jaren geleden als feit werd gezien in de wetenschap kan nu best fout blijken te zijn.

Het is bijvoorbeeld jaren als feit aangenomen dat het heelal onveranderlijk was. Einstein geloofde duidelijk in een onveranderlijk heelal, terwijl de waarnemingen tegenwoordig duidelijk aantonen dat we in een uitdijend heelal leven. Tot slot, een theorie is een samenvoegsel van een groot aantal hypothesen die resulteren in een consistente beschrijving van een natuurverschijnsel. Een theorie kan nooit als absolute waarheid worden bewezen, maar kan wel met data worden weerlegd. In het dagelijks taalgebruik is een theorie iets vaags dat weinig op heeft met de werkelijkheid. In de wetenschap is een theorie een consistent geheel dat een natuurverschijnsel zeer goed beschrijft. Je zou bijvoorbeeld iemand kunnen horen zeggen over Einstein's relativiteitstheorie:"Maar het is maar een theorie...", daarmee zeggend dat je er niet op kunt vertrouwen. Einstein's theorie is wel een theorie, maar is wel goed onderbouwd en tot nog toe vele malen gestaafd met waarnemingen.

Criteria voor wetenschappelijke modellen

Drie criteria worden toegepast op wetenschappelijke modellen:

- Het eerste criterium is dat een model moet passen bij de data. Het moet passen bij wat we zien.
- Het tweede criterium is dat het model voorspellingen moet doen die testbaar zijn en dat het mogelijk moet zijn om het model af te keuren - dat wil zeggen, dat het mogelijk is om aan te tonen dat het aangepast moet worden om nieuwe data in te passen of volledig afgewezen moet worden. Als de voorspellingen van een model juist blijken te zijn, dan is dit een aanwijzing dat het model goed is, maar dit vormt nog steeds geen bewijs dat het model totaal juist is.
- Het derde en laatste criterium van een goed model is dat een model theoretisch mooi is. Dit is een moeilijk concept om te definiëren. In het algemeen betekent dit dat een model simpel, netjes en mooi moet zijn. Vandaag de dag wordt met mooiheid gedacht aan symmetrie en simpelheid in modellen. Een model moet zo simpel mogelijk zijn, dat wil zeggen, het zou zo min mogelijk aannames moeten bevatten. De filosofische keus dat, bij twee concurrerende modellen (die alle waarnemingen even goed verklaren), het beste model het model is met de minste aannames wordt ook wel *Ockham's scheermes* genoemd. Dit is genoemd naar de 14e eeuwse Franciscaner monnik-filosoof die benadrukte dat in het construeren van een argument men niet verder zou moeten gaan dan wat logischerwijs noodzakelijk is.

Ockham's scheermes
In argumentationibus entia non sunt multiplicanda sine necessitate - Binnen redeneringen moeten de onderdelen niet zonder noodzaak worden toegevoegd

William of Ockham

3 Van geocentrisme naar heliocentrisme

We hebben tegenwoordig een redelijk goed beeld van wat we zien aan de hemel, en onze plek in het nabije heelal. De zoektocht naar dit beeld is begonnen al lang voordat de telescoop was uitgevonden.

Hoewel talloze beschavingen hebben bijgedragen aan de verklaring van de ster- en planeetbewegingen die wij zien, gaan wij kijken naar twee belangrijke theorieën die deze bewegingen verklaren, waarvan één bijna 2.000 jaar oud is. We bekijken deze twee theorieën om twee redenen: ten eerste om de vraag te beantwoorden hoe de aarde in het grote geheel past en ten tweede om te kijken hoe goed zij voldoen aan de eerdergenoemde criteria voor een goed wetenschappelijk model.

Maar waarom gaan we eigenlijk terug in de tijd, in plaats van direct in de huidige astronomie te duiken? En waarom gaan we aan de slag met een achterhaald model? Om de astronomie echt goed te begrijpen - en wetenschap in het algemeen - moeten we kijken hoe deze zich ontwikkeld heeft in de tijd. We moeten begrijpen hoe we aan de huidige ideeën komen. Elke nieuwe ontwikkeling in de wetenschap is bij voorbaat al incompleet en mogelijk zelfs onnauwkeurig; dit is een logisch gevolg van het feit dat het verricht wordt door mensen met elk hun eigen vooroordelen en inzichten. Terugkijken en begrijpen hoe een idee ontstaan is geeft je meer begrip voor de huidige kennis.

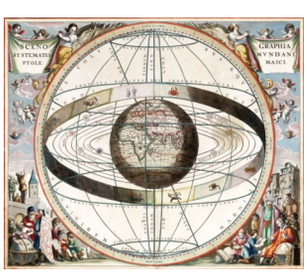
3.1 Het Griekse geocentrische wereldbeeld

Om de evolutie van ons huidige wereldbeeld te bekijken starten we bij de oude Grieken, die leefden van ong. 600 voor Chr. tot zo'n 200 na Chr. Voordat we echter naar het Griekse model kunnen kijken, moeten we eerst weten hoe de oude Griekse filosofen tegen de wereld aankeken, in het bijzonder *Aristoteles* (384-322 v. Chr.).

Aristoteles = Griekse filosoof, hierboven te zien in een glas-in-loodraam in het Dominicanenklooster te Zwolle.

Er is een fundamenteel verschil tussen de manier waarop de Grieken naar de sterren keken, en andere beschavingen in die tijd. De Babyloniërs bestudeerden de hemel omdat ze geïnteresseerd waren in dagelijkse gebeurtenissen, en de Egyptenaren bestudeerden de hemel omdat ze voorspellingen wilden doen voor de landbouw. De oude Grieken echter wilden puur uit filosofische overwegingen de hemel bestuderen om te begrijpen hoe alles werkte. Zij namen de eerste stappen om een sluitend model voor het heelal te maken. *Pythagoras* (530 v. Chr.), één van de eerste experimentele wetenschappers, geloofde dat wiskunde de natuur kon beschrijven en stelde als eerste voor dat de aarde een bol was. Zijn studenten, de Pythagoreanen, introduceerden rond 450 v. Chr. een model waarbij het heelal een bol was, met een centraal vuur dat een kracht uitoefende die alle bewegingen in het heelal veroorzaakte. Rond dit vuur, draaiden, in volgorde van binnen naar buiten, de aarde, de maan, de zon, de vijf bekende planeten, en de sterren. Dit systeem gaat ruim 2.000 jaar vooraf aan het revolutionaire model van Copernicus waarin de planeten om de zon draaien. De Pythagoreanen waren ook de eersten die de rondheid van de schaduw van de aarde op de maan gebruikten om de theorie te ondersteunen dat de aarde een bol was.

Pythagoras



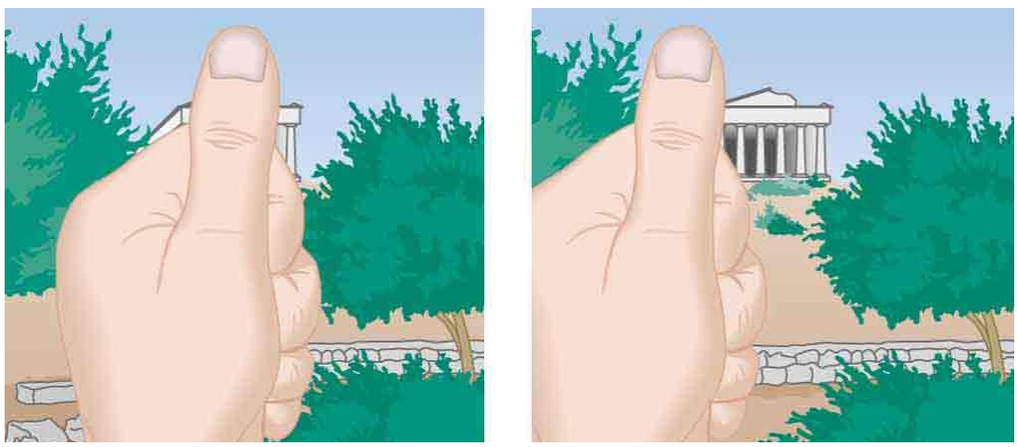
Figuur 3: Oude gravure waarin de centrale plaats van de aarde duidelijk naar voren komt.

Geocentrisch wereldbeeld = met de aarde als middelpunt

Aristoteles verwierp het idee van de Pythagoreanen dat de aarde rond een centraal vuur bewoog en plaatste de aarde in het midden van het zonnestelsel, het zogenaamde *geocentrisch* wereldbeeld (zie fig. 3).

Hoewel dit model in onze ogen totaal verkeerd lijkt, had Aristoteles goede redenen om dit model te introduceren. Hij zei dat als de aarde bewoog, dat we dan veranderingen moesten kunnen zien in de posities van de sterren ten opzichte van elkaar, net zoals wanneer je over een weg rijdt, je veranderingen ziet in de posities van bomen dichtbij ten opzichte van de bomen ver weg. Zo'n verandering van positie noemen we ook wel een *parallax.*

***parallax**= de schijnbare verplaatsing van een voorwerp t.o.v. de achtergrond t.g.v. de verplaatsing van de waarnemer.*



Figuur 4: Parallax zoals je die kunt zien wanneer je achtereenvolgens met je linker- en rechteroog langs je duim naar een ver weg gelegen voorwerp kijkt.

3.2 De eerste stap van de kosmische ladder: Parallax

Voorkennis hoeken. In de sterrenkunde gebruiken we een andere eenheid voor hoeken als die we tot nog toe gewend zijn.
In plaats van een decimale onderverdeling worden graden verder onderverdeeld in boogminuten (') en boogseconden ("). Er geldt: 1 ° = 60' en 1' = 60". Je kunt dit vergelijken met een uur dat verdeeld wordt in minuten en seconden. (Dus 1"= 1/3600 ° en 1" = $4{,}85.10^{-6}$ rad.)

a Reken 23,575 ° om in boogminuten en boogseconden.

b Een voetbalveld is 105 m lang. Als je langs het veld loopt, leg je eigenlijk een klein boogje af van de aardomtrek. Bereken hoeveel boogseconden dat boogje is.

Opgave 1: LES: Parallax in het klein

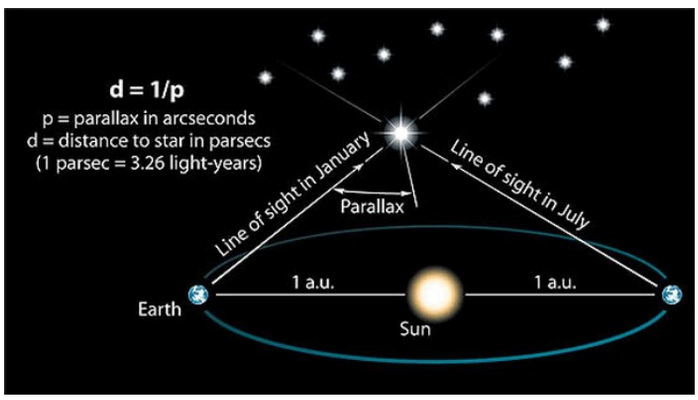
Houd een potlood voor je met gestrekte arm, knijp één oog dicht en kijk langs het potlood naar een poster aan de muur. Kijk nu met je andere oog en let op de plaats van het potlood ten opzichte van de poster.

a Wat zie je? Maak een tekening van bovenaf gezien.

b Hoe zou je de hoek kunnen meten waaronder het potlood 'verspringt'?

c Hoe kun je hieruit bepalen hoe ver het potlood weg is? Schrijf een formule op.

De halve hoek van de maximale verandering heet de parallax en wordt aangeduid met het symbool *p*. Anders gezegd, *parallax* is de halve hoek tussen de richtingen waarin een object door twee waarnemers (of één zich verplaatsende waarnemer) wordt gezien (zie fig. 5).



Figuur 5: Parallax zoals die bij sterren voorkomt.

In de tijd van Aristoteles was deze parallax echter niet waar te nemen, omdat de afstand van de sterren zo groot is dat de hoeken waarover we het hebben erg klein zijn. Aristoteles kwam tot de conclusie dat er geen parallax was, en dat de aarde dus niet bewoog. Dit is een typisch voorbeeld van hoe een perfecte logische redenering kan leiden tot een foute conclusie als je incomplete data tot je beschikking hebt.

Het duurde tot 1838 voordat de eerste parallax meting van een ster succesvol werd uitgevoerd. De dichtstbijzijnde ster, Proxima Centauri, bleek een maximale parallax van 1,5" te vertonen. Dit is tevens de grootste parallax die waargenomen kan worden. Deze hoek is erg klein (vergelijkbaar met de hoek tussen twee zijden van een voetbal op 30 km afstand), en daarom is deze niet eerder waargenomen.

Omdat de parallax van een ster afhangt van de afstand van die ster tot de aarde, kun je de parallax gebruiken om de afstand van een ster te meten. Vanaf 1838 zijn zo de afstanden bepaald van nabije sterren. Dit is zo gebruikelijk geworden dat in de sterrenkunde de eenheid *parsec* is ingevoerd, gedefinieerd als de afstand waarop een ster staat die een parallax van één boogseconde heeft (3,26 lichtjaar).

parsec: de afstand tot een ster die een parallax vertoont van 1", deze is gelijk aan 3,26 lichtjaar.

lichtjaar = de afstand die licht aflegt in een jaar tijd ($9{,}46 \times 10^{15}$ m).

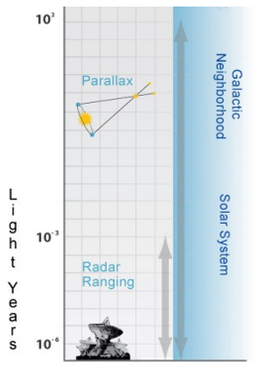
De parallax is te berekenen met de volgende formule (zie fig. 5):

$$d(\mathrm{pc}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{p('')}, \quad d = afstand(parsec), \quad p = parallax(boogsec) \qquad (1)$$

De afstand tot een ster in parsec is *gedefiniëerd* als 1 gedeeld door de hoek in boogseconden!

De afstanden tot sterren worden vaak gegeven in parsecs, afgekort als pc, of kiloparsec (kpc) en megaparsec (Mpc). Astronomische Eenheid = de afstand van de zon tot de aarde ($149{,}6 \times 10^9$ m) Om de parallax te kunnen gebruiken moet natuurlijk wel de afstand van de aarde tot de zon goed bekend zijn. Dit heet de *astronomische eenheid*. Deze afstand is tegenwoordig goed bekend door radarmetingen binnen ons zonnestelsel.

Astronomische Eenheid = de afstand van de zon tot de aarde ($149{,}6 \times 10^9$ m).



Figuur 6: De kosmische ladder voor de nabije ruimte.

Hierbij wordt een radarpuls afgevuurd op bijv. Venus, en uit de reflectie en de tijdsduur kunnen we dan de precieze afstand bepalen. Uit deze afstand kan ook door middel van wetten die we later tegenkomen de afstand tot de zon bepaald worden. Afstandsmetingen met behulp van parallax kunnen gebruikt worden voor sterren tot een afstand van ongeveer 1.000 lichtjaar. De metingen m.b.v. parallax en radar noemen we ook wel de 1e stap van de kosmische ladder waarmee we de afstanden in het heelal kunnen bepalen. Dit heet zo omdat alle volgende afstandsmetingen gebaseerd zijn op de stap ervoor. Door het bepalen van afstanden die steeds iets groter zijn kunnen we zo een beeld krijgen van de schaal van het heelal.

Opgave 2: Metingen aan parallax

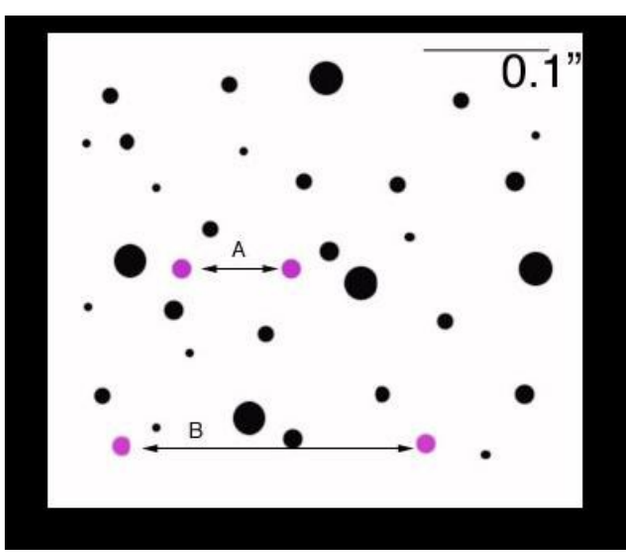
Met een tussenpoos van 6 maanden worden twee opnamen gemaakt van de sterrenhemel. Deze twee opnamen worden over elkaar heen gelegd, zodat je een evt. parallax van sterren snel kan zien. Dit levert de opname van fig. 7 op. De schaal in boogseconden is rechtsboven te zien.

a Wat is de totale hoekverschuiving van de sterren a en b in boogseconden?

b Wat is de gemeten parallax van de sterren a en b in boogseconden?

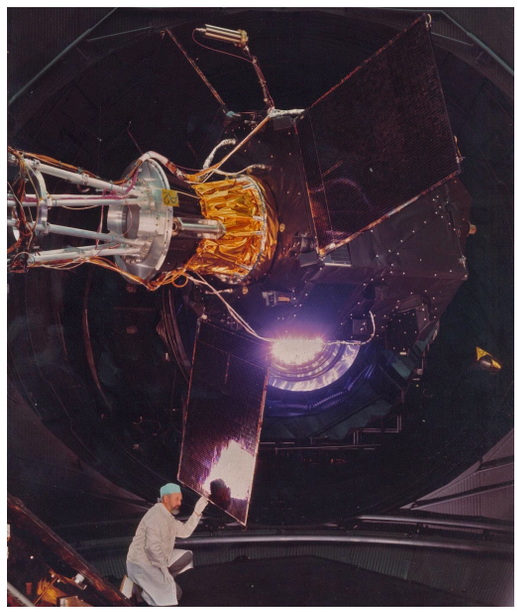
c Bepaal met behulp van de opname de afstand tot de sterren a en b in parsecs en in lichtjaren.

d Maak een beredeneerde schatting van hoeveel je antwoord af kan wijken van de werkelijkheid.



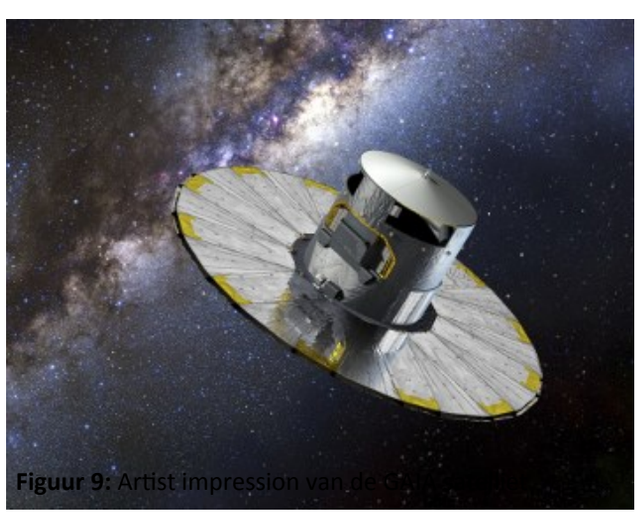
Figuur 7: Gemeten parallax met een tussenpoos van 6 maanden.

HIPPARCOS en GAIA



Figuur 8: Hipparcos satelliet in de grote zonne-simulator, Estec februari 1988.

Vanaf de aarde kunnen geen parallaxen kleiner dan 0,008 boogseconden (afstand 400 lichtjaar) worden waargenomen door o.a. atmosferische verstoringen. In 1989 lanceerde de European Space Agency (ESA) daarom de HIPPARCOS (HIgh Precision PARrallax COllecting Satellite) Satelliet om zeer nauwkeurige parallax metingen te doen aan nabije sterren vanuit de ruimte. Deze satelliet heeft de parallax van in totaal 120.000 sterren met een nauwkeurigheid van 0,001 boogseconde (doorsnede van een golfbal aan de andere kant van de Atlantische Oceaan), en meer dan 2 miljoen sterren met een nauwkeurigheid van 0,02-0,03 boogseconden gemeten. Van de laatste groep sterren is ook een spectrum meting verricht om de temperatuur van de sterren te bepalen (zie hfdst. METEN AAN STERREN). Hiermee is het nabije heelal (tot ong. 500 lichtjaar afstand) 3-dimensionaal in kaart gebracht. Dit is echter nog maar een fractie van ons melkwegstelsel, dat een doorsnede heeft van zo'n 100.000 lichtjaar.



Figuur 9: GAIA satelliet

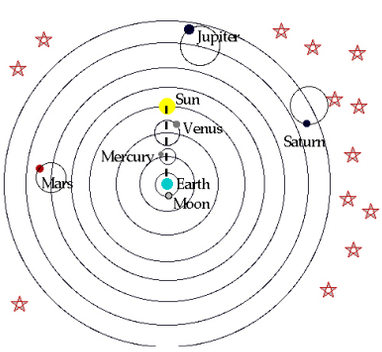
Om meer informatie te krijgen over een groter gedeelte van de melkweg heeft de ESA de GAIA satelliet gelanceerd in december 2013. Deze satelliet zal van zo'n 1.000.000.000 sterren de parallax gaan meten met een nauwkeurigheid van 20 microboogseconden. Dit is ongeveer 1% van de totale melkweg. Hiermee zullen we een driedimensionale kaart krijgen van ons nabije melkwegstelsel met een heel hoge nauwkeurigheid.

3.3 Het heelal van de sferen

Aristoteles' idee van het heelal maakte een duidelijk onderscheid tussen de aardse en de hemelse zaken. Hij zag dat materie zich op aarde anders gedroeg dan in het heelal. Objecten op aarde leken altijd naar beneden te vallen, terwijl de sterren en planeten dat niet deden, zij bewogen in cirkels. Een model, al ontwikkeld in de tijd voor Aristoteles door de oude Grieken, ging er vanuit dat de sterren zich op een *sfeer* bevonden die rond de aarde draaide. De zon met de andere hemelse objecten bevonden zich op een andere sfeer die onafhankelijk draaide van de sterren en die een hoek maakte met de sfeer van de sterren.

sfeer = kristallen bol met daarop hemelse objecten.

Er was een goede reden voor de Grieken om te kiezen voor deze sferen. Zij hadden een grote bewondering voor symmetrie, en de bol was hier een perfecte invulling van. Aristoteles bouwde dit model uit tot een model met wel 55(!) sferen waarop zich alle hemellichamen bevonden. Dit model kon alle bewegingen in het heelal goed voorspellen, behalve de retrograde beweging en het feit dat de helderheid van planeten varieerde tijdens hun omloop.



Figuur 10: Het model van Ptolemeus van het zonnestelsel met de epicykels.

Ptolemeus

Het Griekse model dat we bestuderen is het model van *Ptolemeus*, die leefde rond 150 na Chr. Zijn model heeft zo'n 1.350 jaar stand gehouden. Ptolemeus verwierp de sferen, omdat hij geen reden zag waarom de zon en de planeten aan kristallen bollen vast moesten zitten. De sterren zaten volgens hem nog wel steeds vast op de hemelsfeer. De mensen in de tijd van Ptolemeus dachten nog steeds dat het heelal perfect in elkaar moest zitten. De cirkel, een figuur zonder begin of eind, zou dan ook de vorm van het heelal moeten zijn. De sterren bewogen inderdaad in cirkels rond de aarde, en bijvoorbeeld de maan paste ook perfect in het model van Ptolemeus. Dat de maan niet helemaal perfect was (denk aan de 'vlekken' die je ziet op de maan) was niet vreemd voor de Grieken, aangezien de maan tussen de onperfecte aarde en de perfecte hemel in lag. Ook de oostwaartse beweging van de planeten paste perfect in het model, maar de retrograde beweging gaf wel problemen. Was de hemel dan toch niet zo perfect als dat hij leek?

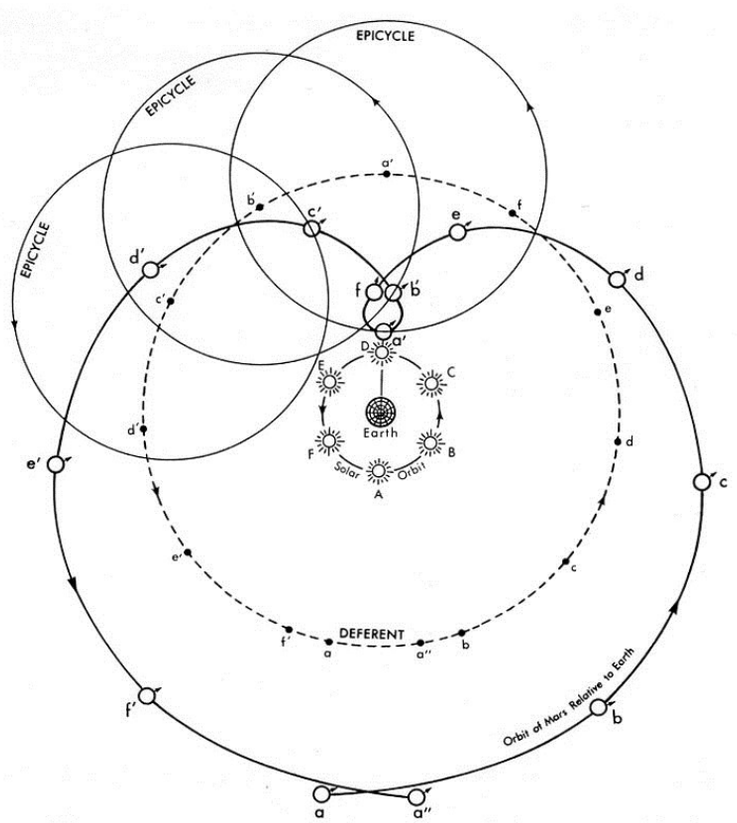
Ptolemeus slaagde er uiteindelijk toch in met perfecte cirkels de retrograde bewegingen uit te leggen. Hij kwam tot de conclusie dat de planeten weliswaar in perfecte cirkels bewogen rond de aarde, maar dat daarbovenop nog perfecte cirkelbewegingen te zien waren rondom de grote cirkel, de zogenaamde *epicykels* (zie fig. 10).

epicykel = hulpcirkel, bedoeld om de schijnbare beweging van een planeet aan het uitspansel te kunnen verklaren.

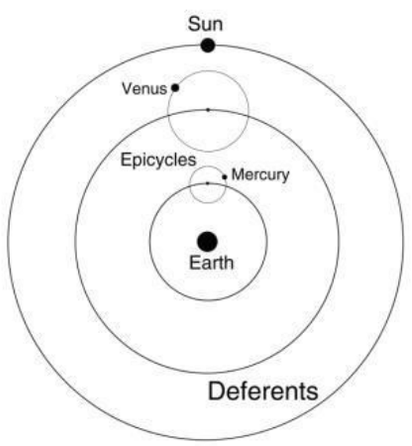
deferent = denkbeeldige cirkel waarom de epicykel van een planeet zich rond beweegt.

Door de planeet met een constante snelheid over de hoofdcirkel, de *deferent* te laten bewegen, terwijl de planeet zelf nog een cirkelvormige beweging uitvoert kun je zeer complexe banen krijgen (zie fig. 11),

waarbij zelfs retrograde bewegingen mogelijk zijn. Dit model verklaarde ook waarom de planeet helderder was in het midden van de retrograde beweging, want dan bewoog hij zich in de epicykel het dichtst bij de aarde.



Figuur 11: De retrograde beweging van Mars verklaard met epicykels. De doorgetrokken lijn is de resulterende baan die we zien.



Figuur 12: De beweging van Mercurius en Venus verklaard met epicykels.

Aquinas

Copernicus

Aristarchus

heliocentrisch wereld-beeld = de zon staat centraal in het zonnestelsel.

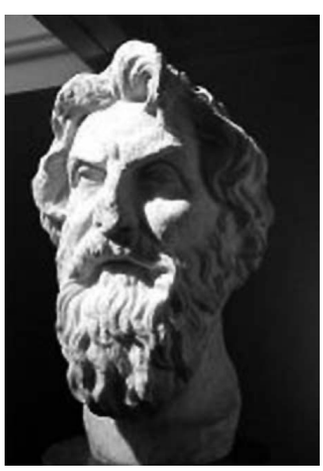
Dan blijft nog de vraag waarom Mercurius en Venus geen retrograde beweging vertoonden. Ook hier had Ptolemeus een antwoord op. Door een epicykel te maken die altijd in lijn bleef met de aarde en de zon (zie fig. 11), konden de waarnemingen verklaard worden en was het model kloppend.

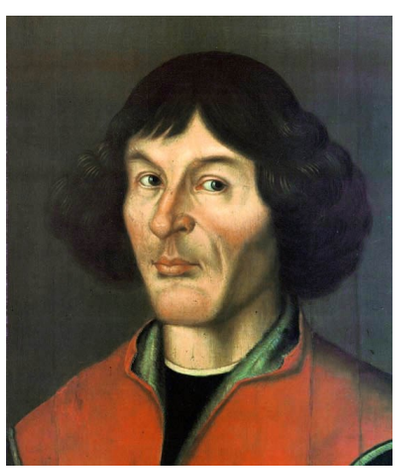
3.4 Het heliocentrisch wereldbeeld

Het model van Ptolemeus kon, mede dankzij een gebrek aan goede waarnemingen, wel zo'n 1.350 jaar stand houden. Daarbij kwam nog dat rond het jaar 1300 na Chr. het model door de Italiaanse christelijke filosoof Thomas Aquinas (1225-1274) geïntegreerd werd in het Christendom. Mede door de centrale plaats van de aarde paste dit model zeer goed in het theologisch wereldbeeld, en het werd dan ook door de kerk met enthousiasme ontvangen. Mede hierdoor werd het model een christelijk dogma waar niet over viel te discussiëren. Dit was de hoofdreden waarom dit model zo lang stand kon houden. Hier zou echter rond 1530 grote verandering in komen mede dankzij het werk van *Nicolaus Copernicus*.

Copernicus kon echter zijn nieuwe wereldbeeld niet vormgeven zonder het werk van de oude Griekse wetenschapper *Aristarchus* die leefde rond 280 v. Chr. (dat is 400 jaar voor Ptolemeus). Aristarchus had 1.800 jaar voor Copernicus al een *heliocentrisch wereldbeeld*. Volgens hem bevond de maan zich in een baan om de aarde, terwijl de aarde op zijn beurt rond de zon draaide. De aarde zelf draaide rond zijn as, wat de beweging van de sterren langs de hemel verklaarde. Dit model werd echter door Ptolemeus verworpen. Hij redeneerde dat als de aarde zou draaien rond zijn as er gigantische winden zouden moeten zijn door de stilstaande lucht waar de aarde dan doorheen moest draaien. Hij begreep nog niet dat de aarde de lucht draagt en dat die lucht dus meedraait met de aarde.

Waarom kwam Aristarchus dan toch tot dit model, terwijl alle waarnemingen uit die tijd dit model tegenspraken? Dit had te maken met een aantal waarnemingen en redeneringen die Aristarchus deed. Deze redeneringen vind je op blz. 13.



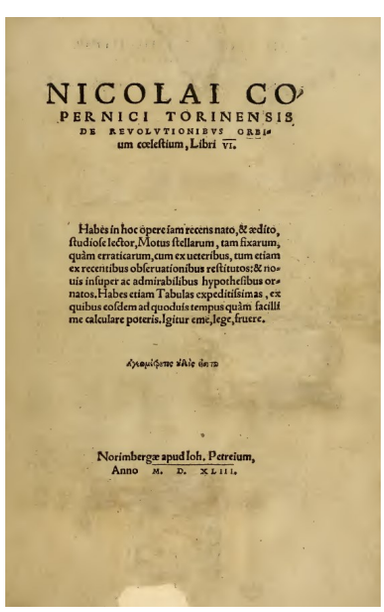


Figuur 13: Links: beeld van Aristarchus.
Rechts: Portret uit 1580 van Nicolaus Copernicus.

Het model van Aristarchus verdween echter in de vergetelheid tot zo'n 1.800 jaar later Copernicus het weer te voorschijn haalde en dit model verder ging uitwerken.

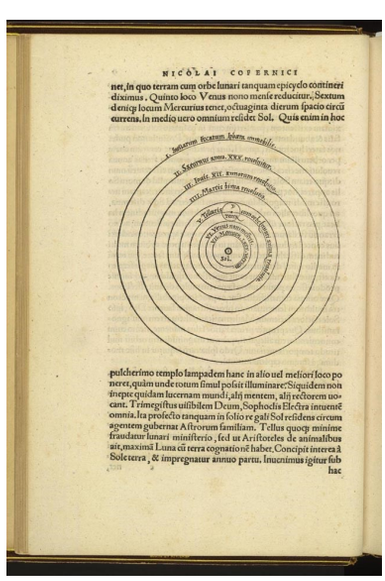
Er waren een aantal redenen voor Copernicus om weer naar dit model te kijken, namelijk:

- Het model van Ptolemeus bleek op de lange termijn (eeuwen) niet nauwkeurig genoeg. De werkelijke positie van de planeten week ongeveer de straal van 4 volle manen van de voorspelling af. Om deze reden werd het model van Ptolemeus regelmatig opgewaardeerd, dat wil zeggen de posities van de planeten werden gereset. Een goed model zou dit soort resets niet nodig hebben. Copernicus zag dit en zocht naar een beter model.
- Na het bestuderen van oude geschriften kwam Copernicus tot de gedachte dat een heliocentrisch model betere data op zou leveren, maar dat het ook esthetisch mooier in elkaar zat. Hij verbond astronomie heel duidelijk met zijn geloof, en volgens hem was het logisch dat de zon centraal stond, omdat de zon de bron van het licht en het leven was. De Schepper zou de zon, aldus Copernicus, natuurlijk centraal plaatsen. Dit waren dus duidelijk geen wetenschappelijke, maar religieuze argumenten.
- Ten derde was het al lang bekend dat de helderheden van de planeten varieerden als ze bewogen langs de hemel. Copernicus ontdekte dat Mars meer in helderheid varieerde dan Ptolemeus met zijn model kon voorspellen. De epicykels waren niet groot genoeg om de variaties te verklaren. Het model verklaarde dus wel het verschijnsel, maar niet nauwkeurig genoeg. Het was deze waarneming die Copernicus ertoe bracht om het model van Aristarchus weer uit de kast te halen na 1.800 jaar verborgen te zijn geweest.


NICOLAI CO
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI
um coelestium, Libri VI.

Habes in hoc opere iam recens nato, & ædito, studiose lector, Motus stellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, cum ex ueteribus, tum etiam ex recentibus obseruationibus restitutos: & nouis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quoduis tempus quàm facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.

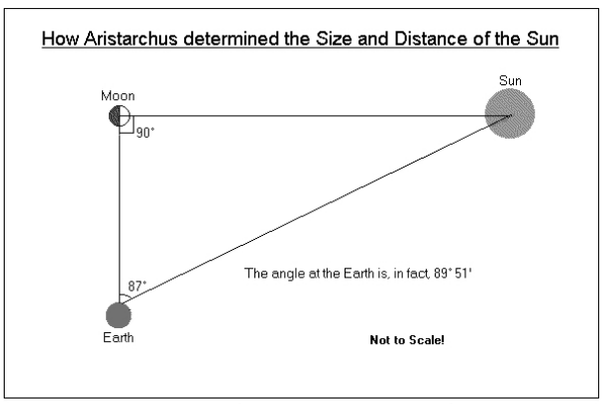

NICOLAI COPERNICI

ner, in quo terram cum orbe lunari tanquam epicyclo contineri diximus. Quinto loco Venus nono mense reducitur. Sextum denig locum Mercurius tenet, octuaginta dierum spacio circũ currens. In medio uero omnium residet Sol. Quis enim in hoc

pulcherimo templo lampadem hanc in alio uel meliori loco ponaret, quàm unde totum simul possit illuminare? Siquidem non inepte quidam lucernam mundi, alij mentem, alij rectorem uocant. Trimegistus uisibilem Deum, Sophocles Electra intuentẽ omnia. Ita profecto tanquam in solio re gali Sol residens circum agentem gubernat Astrorum familiam. Tellus quoq; minime fraudatur lunari ministerio, sed ut Aristoteles de animalibus ait, maximã Luna cũ terra cognationẽ habet. Concipit interea à Sole terra, & impregnatur animo partu. Inuentimus igitur sub hac

Figuur 14: Enkele bladzijden uit De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543).

De waarnemingen van Aristarchus (280 v. Chr.)

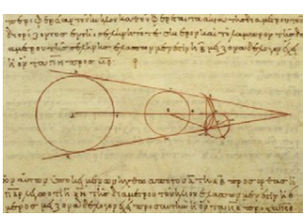


Figuur 15: Aristarchus' bepaling van de afstand tot de zon.

Relatieve afstand tot de zon

Aristarchus redeneerde dat wanneer het halve maan is, de hoek zon, maan en aarde 90 ° is (zie fig. 15). Door het meten van de hoek tussen de zon en de maan kon hij zo een driehoek vormen zoals in de figuur. Aristarchus kwam tot een hoek van 87 °. Op deze manier vond hij dat de afstand van de aarde tot de zon ongeveer 20x zo groot was als de afstand van de aarde tot de maan. In werkelijkheid is de hoek tussen zon en maan echter 89,85 °, en dan zou Aristarchus gevonden hebben dat de zon 390x zo ver weg staat als de maan.

Relatieve grootte van de aarde en de maan



Figuur 16: Aristarchus' bepaling van de grootte van de maan. Griekse kopie van boek Aristarchus 10e eeuw na Chr.

Door waarnemingen aan maansverduisteringen kon Aristarchus een redelijke schatting maken van de grootte van de maan t.o.v. de aarde (zie fig. 16). Door te meten hoe lang de passage van de maan door de aardschaduw duurt kwam hij tot de conclusie dat de maan 3x zo klein was als de aarde (in werkelijkheid 3,7x). Vervolgens concludeerde hij uit het feit dat zonsverduisteringen maar nauwelijks voorkomen dat de grootte van de zon en de maan vanaf de aarde gezien ongeveer even groot moesten zijn.

Relatieve grootte van zon en maan

Omdat de zon en de maan vanaf de aarde ongeveer even groot leken concludeerde Aristarchus dat:

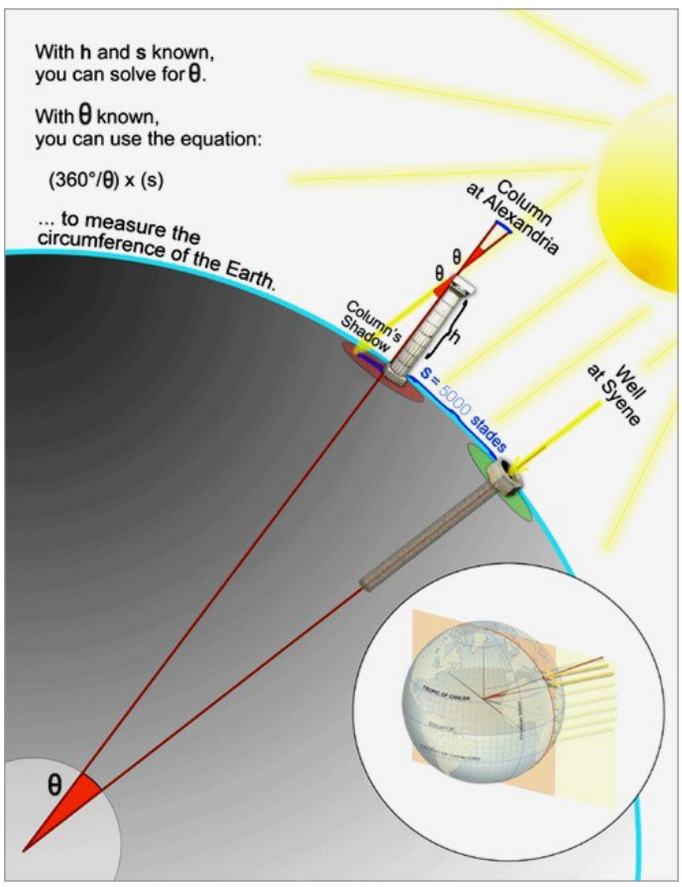
$$\frac{\textit{doorsnede van de maan}}{\textit{doorsnede van de zon}} = \frac{\textit{afstand aarde - maan}}{\textit{afstand aarde - zon}} \qquad (2)$$

Hieruit volgde dat de zon ongeveer 19x zo groot moest zijn als de maan. Deze berekeningen toonden duidelijk aan dat de zon veel groter was dan de aarde. Aristarchus concludeerde dan ook dat niet de aarde, maar de zon centraal moest staan in het zonnestelsel. Zo kwam hij tot het eerste heliocentrische wereldbeeld. Aristarchus had een kaart gemaakt van het zonnestelsel. Hij had alleen nog geen schaal. Op het moment dat hij de straal van de aarde zou weten en de afstand tot de maan zou hij nauwkeurig kunnen vertellen wat de grootte van de zon en de maan en hun afstanden tot de aarde waren. Het zou echter nog zo'n 100 jaar duren voordat de grootte van de aarde door een andere Griekse geleerde werd bepaald.

De grootte van de aarde volgens Erathostenes

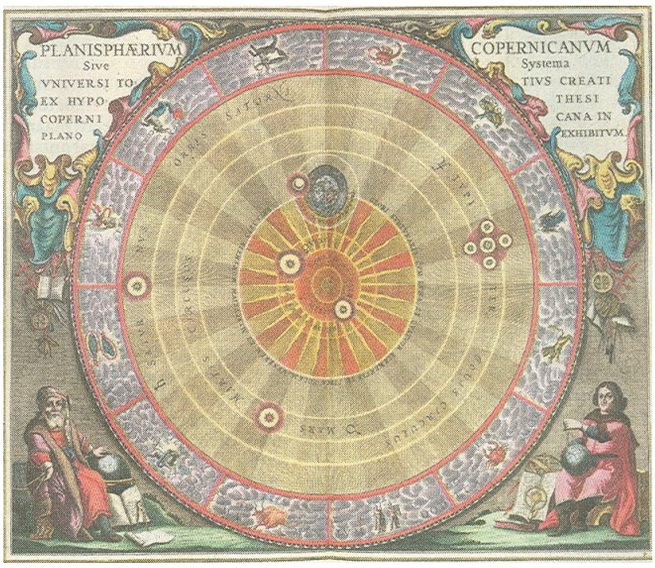
De aarde opgemeten

De eerste persoon die duidelijk de vorm en de grootte van de aarde begreep, ruim 1.700 jaar voor Columbus, was Eratosthenes (276-195 v. Chr.). Zijn berekening van de straal van de aarde was vrij eenvoudig (zie fig. 17).



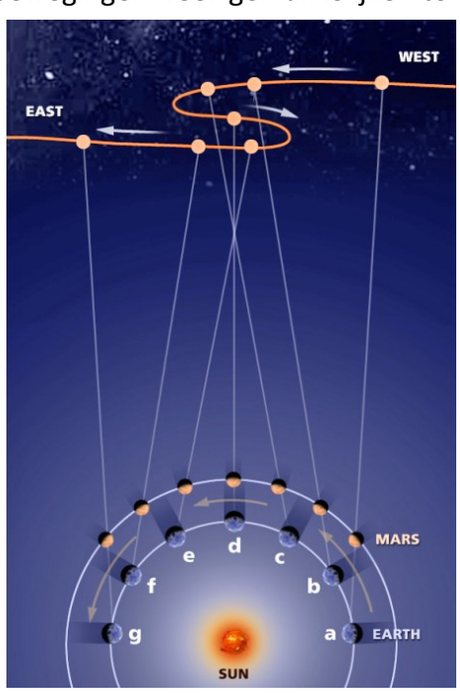
Figuur 17: Bepaling van de grootte van de aarde door Erastothenes.

Eratosthenes wist dat om 12 uur ’s middags op de zomerzonnewende de zon recht in een bron in Syene (het tegenwoordige Aswan, Egypte) scheen zonder een schaduw te werpen. Hieruit concludeerde hij dat de zon op dat moment recht boven de bron stond. In de stad Alexandrië was op dezelfde dag de hoek van de zon met de verticaal ongeveer 7 °, gemeten aan de schaduw van een pilaar. Omdat hij wist van Aristarchus’ resultaten, concludeerde Eratosthenes dat de zon zover weg stond dat de lichtstralen allemaal parallel waren, en dat het verschil in hoek dus te wijten was aan de kromming van de aarde. Omdat 7 ° ongeveer 1/50 van een cirkel (7/360) is, concludeerde hij dat de omtrek van de aarde ongeveer 50 x de afstand was van Alexandrië tot Syene. Deze afstand was ongeveer 5000 stadiën, een lengte-eenheid van ongeveer 0,15-0,20 km. Uitgaande van 16 km komen we op een afstand van 830 km. Dus volgens Erastothenes was de aardomtrek 50 x 830 = 41.500 km, en de straal van de aarde ongeveer 6.600 km. Dit is verbazend dichtbij de werkelijke waarde van 6.378 km!



Figuur 18: Afbeelding van het zonnestelsel volgens het Copernicaanse model uit 1660. Let op, in deze afbeelding zijn de manen van Jupiter al te zien, dit betekent dat deze afbeelding is gemaakt na de uitvinding van de telescoop, en dus na de dood van Copernicus in 1543.

Copernicus bracht het model van Aristarchus weer tot leven. Het argument over de sterke winden die zouden ontstaan deed hij af met de redenering dat de lucht met de aarde meebewoog. Dit moet gelijk leiden tot de conclusie dat de lucht dus niet tot de maan kan reiken, want dan zouden daar de winden ontstaan. Volgens Copernicus zag het model van het zonnestelsel eruit als in fig. 18. We zagen dat planeten oost-waarts bewegen ten opzichte van de sterren, maar dat er soms, volgens een regelmatig patroon, een omkering van de beweging is, en de planeet tijdelijk west-waarts beweegt. Ptolemeus verklaarde dit met behulp van de epicykels. In het model van Copernicus waren deze bewegingen veel gemakkelijker te verklaren. Volgens Copernicus draaiden de planeten met constante snelheden rond de zon (hij ging nog steeds uit van perfecte cirkels!). De aarde was dichterbij de zon, en dus haalde deze Mars zo nu en dan in (Zie fig. 19). Terwijl de aarde beweegt van punt a naar punt c lijkt Mars oostwaarts te bewegen. Dan als de aarde Mars inhaalt keert de beweging tijdelijk om. In positie d is Mars het in het midden van de retrograde beweging en het dichtst bij de aarde. Hier lijkt hij dus het helderst. Vergelijk dit met fig. 23 in WAT ZIEN WE AAN DE HEMEL. Copernicus was ook in staat met logisch redeneren en zijn model de relatieve afstanden van planeten tot de zon te bepalen. We gaan nu eens zelf proberen dit ook te doen voor Venus, op dezelfde manier als Copernicus dat eeuwen geleden deed. Een soortgelijke oefening is ook te doen voor Mars, maar deze is wat bewerkelijker en voeren we nu dan ook niet uit.



Figuur 19: De retrograde beweging verklaard door Copernicus.

Opgave 3: verwerking: Relatieve afstand van Venus tot de zon

In deze opgave gaan we de relatieve baanstraal van Venus bepalen. Dit is de methode die Copernicus gebruikte om de afstand van de twee binnen-planeten (Mercurius en Venus) te bepalen.

- Neem een A4 papier. Zet een stip aan de rechterkant van het papier. Dit is de zon. Teken nu met een passer een gedeelte van een cirkel halverwege het papier met als middelpunt de zon. Dit stelt de baan van de aarde voor, met als straal 1 AU.
- Teken een horizontale lijn door de zon en de baan van de aarde. Neem aan dat de aarde zich op het kruispunt van de cirkel en de lijn bevindt.
- Copernicus mat de hoek tussen de Zon en Venus, als Venus op zijn grootste afstand van de Zon af stond, ook wel de grootste elongatie genoemd. Op dit moment is de lijn van de aarde naar Venus de raaklijn aan de baan van Venus (denk hier even goed over na!). De hoek die Copernicus mat was 46 °.
- Neem een geodriehoek. Zet de oorsprong op de aarde, en teken een lijn met een hoek van 46 ° ten opzichte van de zon.
- Teken een lijn door de zon loodrecht op de lijn die je net getekend hebt.
- Teken met je passer een cirkel door het kruispunt van de twee lijnen met als middelpunt de zon. Dit is de baan van Venus.
- Bepaal de straal van de baan van Venus in AU. Vergelijk je waarde met de waarde in tabel 1.

Door deze berekeningen uit te voeren voor alle bekende planeten kwam Copernicus tot een schaal voor het zonnestelsel (tabel 1).

Planeet	**Copernicus' afstand (AU)**	**hedendaagse afstand (AU)**
Mercurius	0,38	0,387
Venus	0,72	0,723
Aarde	1,00	1,000
Mars	1,52	1,524
Jupiter	5,2	5,204
Saturnus	9,2	9,582

Tabel 1: De afstanden tot de planeten in AU volgens Copernicus en volgens de hedendaagse metingen.

Copernicus had dus wel de relatieve afstanden te pakken, maar de werkelijke afstand was nog steeds onbekend. Tegenwoordig kunnen we bijvoorbeeld met radarmetingen de werkelijke afstand van de planeten bepalen.

4 De wetten van Kepler

Brahe

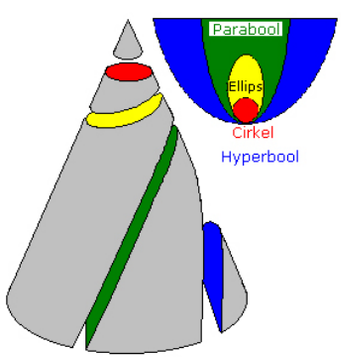
Drie jaar na de dood van Copernicus werd *Tycho Brahe* geboren in Denemarken. Tijdens zijn rechtenstudie kreeg hij interesse in astronomie en ontdekte hij dat de modellen van Ptolemeus en Copernicus gebaseerd waren op onnauwkeurige waarnemingen. Hij concludeerde dat er betere waarnemingen nodig waren van de posities van de planeten terwijl ze bewogen langs de sterrenhemel. In deze tijd was de telescoop nog niet uitgevonden, en alle waarnemingen die gedaan werden waren dan ook met het blote oog. Hiervoor werd een speciaal observatorium (fig. 20) ingericht. Hier mat hij de posities met een nauwkeurigheid van 0,1 °, vlakbij de grens wat met het oog is waar te nemen. Daarbij legde hij als eerste nauwkeurigheden van de waarnemingen vast. Hierdoor werden de waarnemingen beter vergelijkbaar met de modellen. In totaal verrichtte hij zo'n 20 jaar waarnemingen, maar deze konden hem nog steeds niet overtuigen van het heliocentrisch model, enkel en alleen omdat hij geen parallax waar kon nemen van de sterren.

Figuur 20: Tycho Brahe's observatorium, dat was ontworpen om de hoeken te meten van hemellichamen die aan de hemel stonden op precieze tijden.

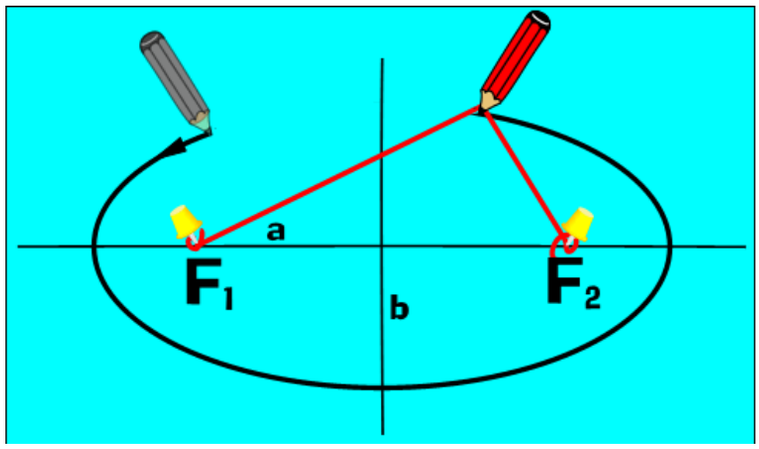
Kepler

De assistent van Brahe, *Johannes Kepler* zou na de dood van Brahe in 1601, verder gaan met de waarnemingen die Brahe verzameld had. Het zou hem vier jaar, en 70 combinaties van cirkels en epicykels, kosten om met de waarnemingen van Brahe een model voor Mars te vinden dat binnen 0,13 ° voorspellingen deed. Dit was echter nog steeds meer dan de nauwkeurigheid van de metingen, en Kepler wist dat het dus nog beter moest kunnen. Het duurde 9 jaar voordat hij een vorm vond die paste bij de baan van Mars. En daarbij ontdekte hij ook dat deze vorm niet alleen voor Mars paste, maar ook voor alle andere planeten. De vorm die hij gebruikte was een e*llips.*

ellips = is een tweedimensionale figuur waarbij voor ieder punt op de ellips geldt dat de som van de twee afstanden tot de brandpunten een vaste waarde heeft.



Figuur 21: Een ellips is een zogenaamde kegelsnede, net zoals een cirkel, een parabool en een hyperbool. Als je de kegel recht doorsnijdt krijg je een cirkel. Als je hem schuin doorsnijdt door de zijden van de kegel krijg je een ellips. Als je hem doorsnijdt evenwijdig aan een zijde krijg je een parabool en als je hem nog verder kantelt krijg je een hyperbool.



Figuur 22: Het tekenen van een ellips is vrij simpel.

Wat is een ellips?

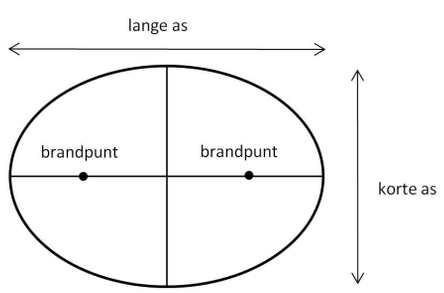
Teken een lijn en kies hierop twee punten, deze noem je de brandpunten. Van elk punt op een ellips kun je twee lijnen trekken naar de twee brandpunten. De som van de lengte van deze twee lijnen is altijd hetzelfde voor elk punt op de ellips.

Het is gemakkelijk om zelf een ellips te tekenen (fig. 22). Je steekt twee punaises in een stuk papier en je legt hier een elastiekje omheen. Als je een potlood in het elastiek steekt en het iets uitrekt en hier vervolgens een rondje mee tekent krijg je vanzelf een ellips. Het elastiek verandert niet van lengte, dus de som van de lengtes naar de brandpunten (de punaises) blijft gelijk. De vorm van de ellips verandert als je het elastiek langer maakt of de afstand tussen de brandpunten verandert.

De lange as van de ellips is de lijn die door de twee brandpunten gaat. De halve lange as (a) wordt gebruikt in berekeningen met de derde wet van Kepler omdat dit de gemiddelde afstand is van een punt op de ellips tot één van de brandpunten. De korte as is de kortste afstand van rand tot rand, loodrecht op de lange as (zie fig. 23).

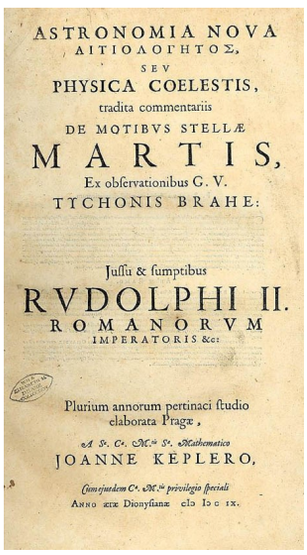
Een voorbeeld van een ellips in het dagelijks leven is een cirkel die je onder een hoek ziet. Als je cirkel recht van boven ziet is dit een ellips met een zogenaamde excentriciteit (uitgerektheid) van 0. Wanneer je de cirkel steeds meer van schuin opzij bekijkt dan neemt de excentriciteit steeds verder toe, tot een maximum waarde van 1.

De excentriciteit is de verhouding van de afstand tussen de brandpunten en de lange as van de ellips.



Figuur 23: de assen van een ellips.

4.1 De eerste twee wetten van Kepler


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:
Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:
Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,
A S. C. M.tis S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,
Cum ejusdem C. M.tis privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ CIↃ IↃ C IX.

Figuur 24: ASTRONOMIA NOVA SEU PHYSICA COELESTIS

Kepler publiceerde zijn eerste model van planeetbewegingen in 1609 in zijn boek 'Astronomia Nova' (fig. 24). Hierin beschreef hij zijn bewegingswetten. De eerste wet luidt:

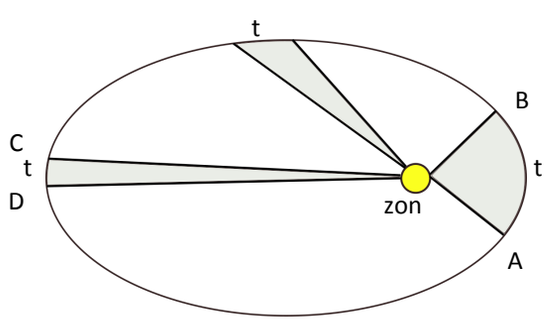
Eerste wet van Kepler
Elke baan van een planeet om de zon is een ellips, met de zon in één van de brandpunten van de ellips.

De tweede wet vertelt ons iets over de snelheid van de planeet als hij door zijn baan beweegt. Kepler zag dat een planeet sneller beweegt als hij dichter bij de zon is en langzamer wanneer hij verder weg is. Hij kon dit samenvatten in een wet waarmee de snelheid in ieder punt te berekenen was:

Tweede wet van Kepler (ook wel: Perkenwet)
Een planeet beweegt langs zijn ellipsbaan met een snelheid die zo verandert dat de lijn die de planeet met de zon verbindt in gelijke tijden gelijke oppervlakken bestrijkt.

Dit klinkt vrij ingewikkeld, maar valt eigenlijk wel mee. Stel we zien de baan van de aarde als een uitgerekte (sterk overdreven) ellips (fig. 25). De letter t staat voor een tijdsinterval van precies 1 maand. De gearceerde oppervlakken zijn de oppervlakken die bestreken worden door de lijn van de aarde naar de zon in die maand (perken). Het oppervlak van C naar D is dus even groot als het oppervlak van A naar B. Maar omdat van A naar B de aarde veel dichter bij de zon is, moet hij dus een grotere afstand afleggen (lees grotere snelheid hebben) om hetzelfde oppervlak te krijgen. Het mooie van de perkenwet is dat deze niet alleen geldt voor tussenpozen van één maand, maar voor elke willekeurig tijdsinterval. Deze wet beschrijft dus hoe de snelheid verandert als een planeet om de zon beweegt. Een planeet beweegt het snelst wanneer hij het dichtst bij de zon is (het *perihelium*) en het langzaamst wanneer hij het verst van de zon vandaan is (het *aphelium*).

perihelium = punt van dichtste nadering tot de zon.
aphelium = punt van grootste afstand tot de zon.



Figuur 25: De perkenwet van Kepler.

4.2 De derde wet van Kepler

Kepler ging een stap verder dan Ptolemeus en Copernicus in zijn zoektocht naar een goed model van de planeetbewegingen. Hij vroeg zich ook af waarom een planeet zo'n beweging uit zou voeren. Het was Kepler - en niet Newton (die we in het volgende hoofdstuk bespreken) - die voorstelde dat er een kracht was die de planeten bij de zon in de buurt hield. Daarnaast moest er volgens Kepler ook een aandrijfkracht zijn die planeten rond de zon liet draaien. Net zoals de aantrekkingskracht moest deze kleiner worden met de afstand tot de zon. Dat is waarom verder weg gelegen planeten langzamer bewogen, aldus Kepler. Het was de gedachte aan deze 'aandrijfkracht' die Kepler op het idee van zijn derde wet bracht. Hoewel deze kracht later niet bleek te bestaan, heeft het Kepler wel geholpen een wet op te stellen die Newton later zou helpen de wetten te vinden die de krachten wel goed beschrijven.

De derde wet van Kepler De derde macht van de afstand van een planeet tot de zon is evenredig met het kwadraat van zijn omlooptijd, oftewel:

$$\frac{a^3}{T^2} = constant \qquad (3)$$

Waarin:

a = gemiddelde afstand planeet-zon (ook wel de halve lange as van een ellips)

T = periode (omlooptijd) van de planeet

Als we a uitdrukken in AU en T in jaren is de constante gelijk aan 1

Opgave 4: verwerking: Derde wet van Kepler

Met behulp van de derde wet van Kepler kun je uit metingen van de omlooptijd ook de afstanden van een planeet tot de zon vinden.

a Van Saturnus is de omlooptijd bepaald en deze blijkt 29,46 jaar te zijn. Wat is de afstand van Saturnus tot de zon in AU? (Vergelijk met tabel 1).

b Toen Neptunus is ontdekt heeft men de afstand van Neptunus bepaald op 30,05 AU. Wat is de omlooptijd van Neptunus? (Vergelijk met de gegevens uit deze studiemap).

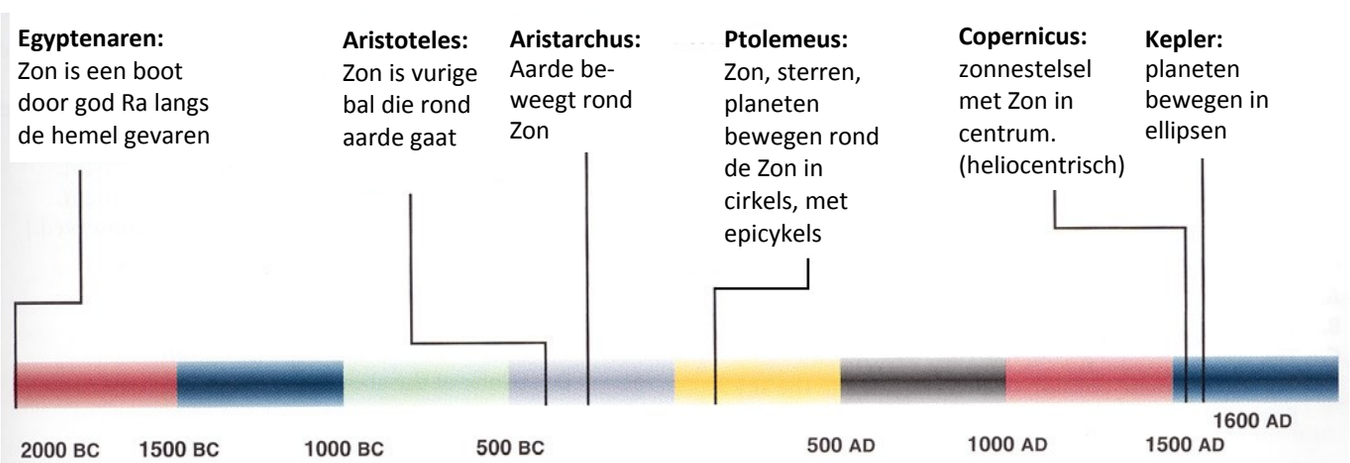
Kepler's aanpassingen aan het heliocentrisch model brachten het in overeenstemming met de data. Het heliocentrische model werkte nu beter dan het geocentrische. Om deze fit met de data te krijgen moest echter wel het eeuwenoude idee van perfecte cirkels verlaten worden. Kepler's enige reden om ellipsen te gebruiken was omdat het werkte.

Ons begrip van ons zonnestelsel zou erg onbevredigend zijn als het hier stopte. We hebben immers wel een model van de bewegingen maar nog steeds geen idee over het waarom.

5 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we gekeken naar modellen van de hemel van de oudheid tot ongeveer 1600 na Chr., inclusief de modellen van Ptolemeus en Copernicus. Beide modellen hadden simpele regels om de beweging van de sterren te verklaren, maar meer ingewikkelde modellen voor de planeet-bewegingen. Copernicus' model had een esthetische voorsprong, omdat het geen speciale regels nodig had voor Mercurius en Venus, waar Ptolemeus die wel moest hebben. Echter als we kijken naar het belangrijkste criterium, het passen van de waarnemingen in het model, was het model van Copernicus niet veel beter dan dat van Ptolemeus. Om Copernicus' model te accepteren moest er een totaal ander beeld van de wereld geaccepteerd worden, omdat dit model de aarde van zijn centrale plaats verplaatste naar gewoon een plekje tussen de andere planeten. Kepler's aanpassing van het model van Copernicus door het gebruik van ellipsen en het gebruik van veranderlijke snelheden, loste het probleem van de niet-passende data op. Volgens de criteria voor wetenschappelijke modellen is het model van Kepler dan ook beter dan dat van Ptolemeus. Kepler's model had echter nog één groot probleem. De wetten die hij voorstelde waren niet 'logisch' en leken op niets wat eerder in de natuur was gezien. Ze zorgden voor een fit van de data, en ze waren esthetisch mooi, maar ze leken uit het niets gekomen te zijn. Dit noem je ook wel een *empirisch model*. Voordat het heliocentrisch model geaccepteerd kon worden moesten de wetten van Kepler eerst verklaard kunnen worden met andere verschijnselen die we zien.

empirisch model = model gebaseerd op waarnemingen, zonder verder theoretische onderbouwing.



Figuur 26: De modellen van het heelal van de afgelopen 4.000 jaar, waarin de meeste veranderingen plaatsvonden in de laatste 500 jaar. Dit hoofdstuk eindigde rond het jaar 1600.

6 Oefeningen

Opgave 5: Erastosthenes

Stel je leeft op de planeet Fomalhault. Op een dag schijnt de zon recht boven een plaats 2.500 km ten zuiden van waar jij woont. Jij ziet de zon onder een hoek van 65 ° met de horizon. Wat is de straal van de planeet?

Opgave 6: toepassing: Lengte, afstand en hoekmaat

a Een trein van 128 m lengte staat stil op het Centraal Station Utrecht. Wat is de hoek waaronder de trein wordt gezien door een waarnemer op de Dom in Utrecht? De afstand CS-Dom is 700 m.

b Op een dag kijk je naar boven en je ziet een Boeing 747 bij de maan vliegen. Je maakt er een foto van (fig. 27). Je weet uit de lessen ANW dat de maan een hoek maakt van ongeveer 0.5 ° en dat een 747 70 meter lang is. Bepaal de afstand waarop de Boeing-747 op dit moment van je vandaan vloog.

Figuur 27: Een Boeing-747 vliegt voor de maan langs.

Zwaartekracht en de moderne astronomie

1 Inleiding

Op 20 juli 1969 landden mensen voor het eerst op de maan. Vanaf de maan klonken de historische woorden van Neil Armstrong: “That’s one small step for (a) man, one giant leap for mankind”. De vlucht naar de maan was mogelijk onder andere door de ontdekkingen die in dit hoofdstuk besproken worden. Misschien wel de belangrijkste ontdekking was dat de wetten van de natuurkunde die de bewegingen op aarde beschreven dezelfde wetten zijn die de beweging van de maan en alle andere hemellichamen beschrijven. De stap van Neil Armstrong op de maan was tot nog toe de laatste stap in een serie gebeurtenissen in de afgelopen 300 jaar met de inbreng van de grootste wetenschappers van de laatste eeuwen. Hun werk heeft geleid tot de verkenning van de ruimte en de moderne astronomie. Hoewel Kepler’s wetten er in slaagden om de nauwkeurigheid van het heliocentrisch model te vergroten, was het het werk van Galileo Galilei en Isaac Newton dat leidde tot de uiteindelijke overwinning van dit model. Meestal kennen we het begin van de moderne wetenschap toe aan Galilei, en Newton formuleerde een aantal basiswetten van de natuurkunde. Zijn werk hielp ons niet alleen de zwaartekracht te begrijpen, maar werkte ook als drijfveer voor de Industriële Revolutie. In de 20e eeuw veranderde Albert Einstein ons begrip voor ruimte, tijd en massa, waarbij hij de wetten van Newton aanpaste zodat ze toepasbaar werden op alle exotische objecten die we tegenwoordig in de ruimte kunnen zien, ver buiten wat Newton zich ooit voor had kunnen stellen. In dit hoofdstuk zien we hoe Galilei met zijn telescoop het heliocentrisch model bevestigde. Dan zien we hoe Newton’s wetten de bewegingen van de hemellichamen konden verklaren, zodanig dat er nog maar een paar vragen overbleven. Deze vragen werden beantwoord door Einstein met zijn algemene relativiteitstheorie.

2 Galileo Galilei en zijn telescoop

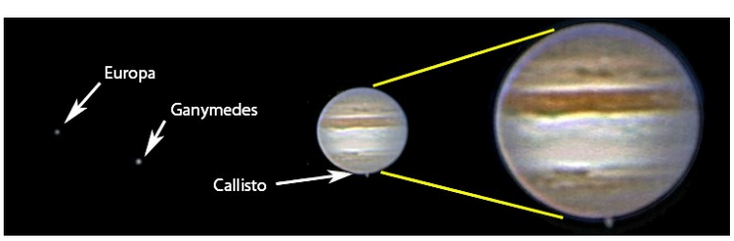
Galileo was de eerste mens die een telescoop gebruikte om de hemel te

Lipperhey

bestuderen. Deze bouwde hij in 1609 nadat hij hoorde over telescopen die door de Nederlander *Johannes Lipperhey* in Middelburg gebouwd werden voor het observeren van schepen op zee. Een aantal waarnemingen van Galilei zouden de discussie over de keus voor het geocentrisch of het heliocentrisch model definitief afsluiten.

Eén van de dingen die Galilei zag was dat er veel meer sterren waren dan je met het blote oog kunt zien. Dit was echter in strijd met de interpretatie van de Bijbel toentertijd, waarin stond: "*God dan maakte die twee grote lichten; dat grote licht tot heerschappij des daags, en dat kleine licht tot heerschappij des nachts; ook de sterren. En God stelde ze in het uitspansel des hemels, om licht te geven op de aarde. (Genesis 1:6-7)"*. Waarom zouden er sterren zijn die zo zwak zijn dat je ze niet kunt zien als het doel was om de aarde te verlichten? Om deze reden waren er mensen die weigerden door een telescoop naar de hemel te kijken.

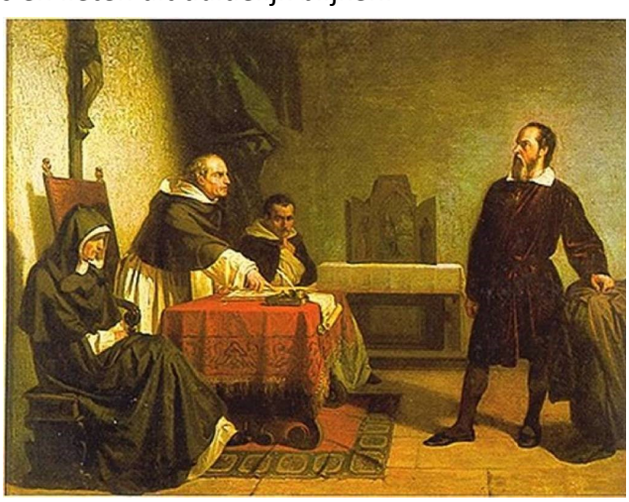
In 1610 richtte Galileo zijn telescoop op Jupiter. Vlakbij de planeet zag hij drie zwakke sterren. Ze stonden allemaal in lijn met de planeet, twee ten oosten, en één ten westen van de planeet. Toen hij de waarnemingen herhaalde zag hij dat het zelfs vier 'sterren' waren, en dat ze om Jupiter heen bewogen (fig. 2). Het waren manen van Jupiter. Hij concludeerde dat de manen om Jupiter draaiden, net zoals de planeten om de zon. Dit was in strijd met het model van Ptolemeus, waar alles om de aarde draaide.



Figuur 2: Jupiter en drie van zijn manen. De vierde (Io) bevindt zich achter Jupiter.

Galileo Galilei

Galileo Galilei werd geboren in Pisa, Italië op 15 februari 1564. Hij kwam uit een vooraanstaande familie en op zijn 12e ging hij naar school, waar hij de normale lessen Grieks, Latijn en logica volgde. Hij ging medicijnen studeren op zijn 17e, maar verloor zijn interesse en ging wiskunde studeren. Hij moest echter na 4 jaar de opleiding verlaten wegens geldgebrek. Galileo ging door met wiskunde bestuderen na het verlaten van de universiteit en in 1589, op 25-jarige leeftijd, werd hij wiskunde professor in Pisa en bracht daar de volgende 20 jaar mee door. In zijn vroege jaren had Galileo weinig interesse in astronomie, maar als medisch student moest hij wat astronomie leren, en zo kwam hij in aanraking met het model van Ptolemeus. In 1597 kreeg hij een boek in handen van Kepler over het model van Copernicus. Galileo had een duidelijke voorkeur voor dit model, maar dat hield hij geheim. Pas in 1613, na zijn waarnemingen, kwam hij hier openlijk voor uit. Galileo's bekendmaking van zijn steun voor het heliocentrisch model startte een onrust die hem en de maatschappij veel verdriet zou bezorgen. Eén van de factoren die hierbij een rol speelde was dat Galileo al zijn werk in het Italiaans schreef, terwijl tot dan toe alle wetenschappelijke publicaties in het Latijn werden geschreven. Door deze keus werd zijn werk bereikbaar voor het gewone volk. Dit deed hij omdat hij ervan overtuigd was dat iedereen die kon lezen kon begrijpen waarom hij een voorkeur had voor het model van Copernicus. In 1616 verklaarde de Katholieke Kerk dat het model van Copernicus vals en absurd was en verbood zij Galileo dit model te ondersteunen. Ook Luther en Calvijn waren tegenstanders van het model van Copernicus en lieten dit duidelijk blijken.



Figuur 3: Galileo voor de inquisitie, door: Cristiani Banti (1857).

Op de leeftijd van 70 jaar werd Galileo door de inquisitie veroordeeld tot levenslang huisarrest. Ook zijn boek Dialogo gepubliceerd in 1632, werd verboden. Galileo werd gedwongen publiekelijk afstand te nemen van zijn ideeën, om zodoende de brandstapel te vermijden. Uiteindelijk was ook de Katholieke Kerk niet in staat de ideeën tegen te houden en in 1992 werd officiëel door de Katholieke Kerk gezegd dat ze een fout hadden gemaakt door Galileo te veroordelen.

2.1 De fasen van Venus

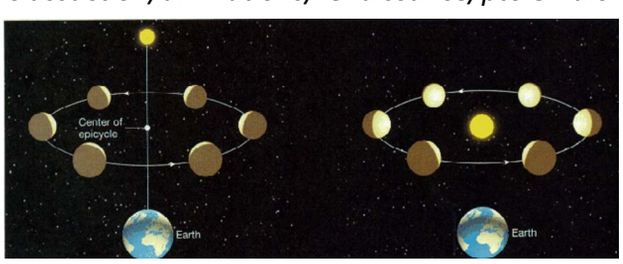
Het meest overtuigende bewijs dat Galileo vond om het heliocentrisch model aan te nemen was dat hij gedurende een langere periode zag dat Venus alle fasen vertoonde die de maan ook liet zien (zie fig. 4).

Figuur 4: De fasen van Venus gefotografeerd in 2002 op de TBGS Observatory door Chris Proctor.

Venus bevindt zich nooit ver van de zon en Ptolemeus verklaarde dit door een epicykel die altijd in lijn bleef met de lijn aarde-zon. Omdat Venus zich dus altijd tussen de aarde en de zon bevindt zal Venus voor ons gezien altijd van achter belicht worden, en kunnen we dus nooit een 'volle Venus' zien. Als dit model juist was dan zouden we de fasen moeten zien zoals in fig. 5 links. Als we echter het model van Copernicus gebruiken (fig. 5 rechts) dan zien we wel alle fasen, en dit kwam ook overeen met de waarnemingen van Galileo. Eindelijk was er dus een waarneming die de keus mogelijk maakte tussen één van de twee modellen. Het heliocentrisch model werd het gekozen model. Het zou echter nog vele tientallen jaren duren voordat ook de maatschappij dit model zou accepteren (zie blz. 3).

The Holy Spirit intended to teach us in the Bible how to go to heaven, not how the heavens go.
Galileo

Er was echter nog één probleem. De wetten van Kepler, die de bewegingen goed voorspelden zoals Galileo ze zag, hadden nog geen logica, maar ze werkten wel. Het zou Newton zijn, die geboren werd in het jaar dat Galileo stierf, die de verbinding zou maken tussen de theorie en de empirische modellen van Kepler. Een duidelijke animatie die de fasen voorspeld door Ptolemeus laat zien kun je vinden op *http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/ptolemaic.html*



Figuur 5: De fasen van Venus zoals voorspeld door Ptolemeus (links) en door Copernicus (rechts).

3 Newton en zijn bewegingswetten

Vanuit de natuurkunde zijn we bekend met de drie wetten van Newton.

Eerste wet:

Als er geen kracht van buiten op een voorwerp werkt, dan blijft het voorwerp met een constante snelheid in een rechte lijn bewegen (als het al bewoog), of het blijft stil liggen (als het al stil lag).

Tweede wet:

Een resultante kracht op een voorwerp laat het voorwerp rechtevenredig versnellen met de kracht en omgekeerd evenredig met de massa.

$$\sum F = m.a \qquad (1)$$

Derde wet:

Als een object A een kracht op object B uitoefent, dan oefent object B een even grote tegengestelde kracht uit op A.

Met behulp van deze wetten kun je ook gaan kijken naar voorwerpen die zich in cirkelvormige (of ellipsvormige) banen bewegen. Voor het gemak gaan we hier nu uit van cirkelvormige banen. Om de bewegingswetten voor cirkelvormige bewegingen te bekijken gaan we eerst even naar de wiskunde van de cirkelbaan kijken. We gaan er vanuit dat een voorwerp zich met een constante snelheid rondom een ander voorwerp (laten we zeggen een ster) beweegt. Dan moet gelden dat het voorwerp in de omlooptijd (T) één rondje maakt rondom de ster. Er geldt dus dat de afstand die het voorwerp aflegt gelijk is aan de omtrek van de cirkel met een straal r. We kunnen nu de snelheid berekenen met:

$$v = \frac{2\pi r}{T}\text{, } v\text{=snelheid (m/s), } r\text{=straal (m), } T\text{=omlooptijd (s)} \qquad (2)$$

Volgens de eerste wet van Newton moet er een kracht werken om de snelheid van een voorwerp te veranderen. Van een voorwerp dat in een cirkel beweegt verandert de snelheid constant, dus de logische conclusie moet zijn dat er dan ook een kracht op het voorwerp werkt. De vraag is echter hoe groot die kracht dan is.

De middelpuntzoekende kracht, zoals deze kracht wel genoemd wordt, is de kracht die nodig is om een voorwerp in een cirkelvormige baan te houden. Deze kracht is gelijk aan:

$$F_{mzk} = \frac{mv^2}{r} \qquad (3)$$

Hierin is:

m = massa van het voorwerp (in kg)

v = snelheid van het voorwerp (in m/s)

r = straal van de cirkelbaan (in m)

Newton's eerste wet zegt dat een object met dezelfde snelheid blijft bewegen in dezelfde richting als er geen netto kracht op werkt. Dit geldt voor objecten op aarde, maar is dit ook zo voor de hemellichamen? Aristoteles dacht dat de wetten die golden op aarde niet golden in de ruimte, maar Newton zocht juist naar een manier om de aardse wetten ook in de ruimte toe te passen. Het was in 1665 dat Newton begon te beseffen dat de zwaartekracht van de aarde ook wel eens op de maan zou kunnen werken. De maan beschrijft een bijna cirkelvormige baan rond de aarde, dus als de bewegingswetten ook voor de maan golden, dan moet er ook op de maan een middelpuntzoekende kracht werken. Newton nam aan dat er een aantrekkende kracht was tussen de aarde en de maan, en dat deze werkt als middelpuntzoekende kracht. Wat was de oorzaak van deze kracht? Newton had geen idee, maar hij veronderstelde wel dat het dezelfde kracht was die zorgde dat alles op aarde naar beneden viel. Het inzicht dat alle materie (vandaar de term universele) elkaar aantrekt begon zo vorm te krijgen. Newton zag in dat de aantrekkingskracht tussen de zon en de planeten kwadratisch met de afstand afnam en rechtevenredig was met de massa's van de twee objecten die om elkaar heen draaien. Op basis van deze gegevens kwam hij tot de *Universele Gravitatiewet*:

Universele Gravitatie-wet

$$F_g = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \; met \; G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2} \qquad (4)$$

Hierin is G de universele gravitatieconstante.

F_g = de aantrekkingskracht tussen beide voorwerpen (in N)

m_1 = massa voorwerp 1 (in kg)

m_2 = massa voorwerp 2 (in kg)

r = afstand tussen beide voorwerpen (in m)

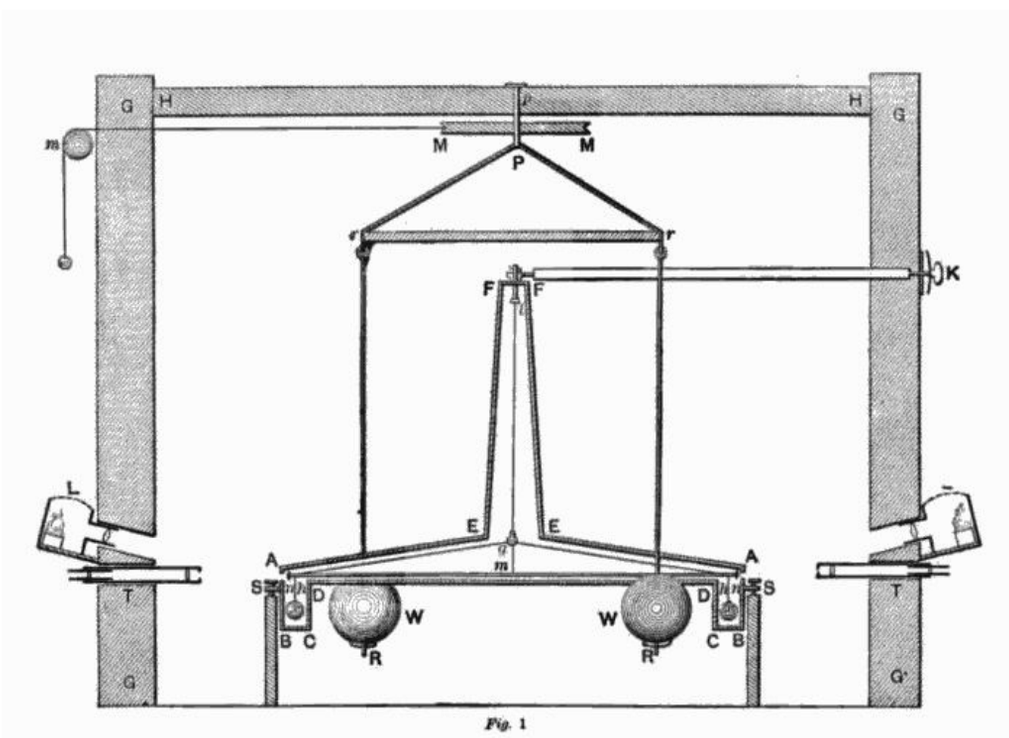
Volgens Newton trok dus ieder object in het heelal ieder ander object aan. Dus dit geldt ook voor jou en bijvoorbeeld de pen die voor je op tafel ligt. Als je echter uitrekent met bovenstaande formule hoe groot die kracht is zul je zien dat deze zo klein is dat je daar in praktijk niks van merkt. Voor de aantrekking tussen jou en de aarde vind je echter waarden die wel heel groot zijn en dus niet verwaarloosbaar zijn. Volgens Newton zorgde de zwaartekracht er niet alleen voor dat objecten naar beneden vallen, maar ook dat de maan om de aarde blijft draaien, en de planeten om de zon.

Opgave 1: Zwaartekracht

Op het aardoppervlak weegt Junis 1.200 N. Hoeveel weegt hij op 20.000 km boven het aardoppervlak?

Universele Gravitatieconstante

De universele gravitatieconstante G is één van de moeilijkst te bepalen natuurkundige constanten. Newton gaf deze constante een plaats in de universele gravitatiewet, maar het zou tot 1798 (71 jaar na Newton's dood) duren voordat er een eerste meting van de grootte van deze constante kwam. Deze meting werd uitgevoerd door Cavendish met een bijzonder instrument (zie fig. 6).



Figuur 6: De meetopstelling waarmee Cavendish de constante G mat.

In dit instrument hingen twee loden ballen van 158 kg vlakbij twee kleine loden ballen van 0,73 kg per stuk. De aantrekkingskracht tussen de ballen zorgde voor een kleine verdraaiing van het instrument die meetbaar was. De kracht die voor deze verdraaiing zorgde had een grootte van 1,47. 10^{-7} N (ongeveer het gewicht van een korrel zand!). Om verstoringen te voorkomen stond het instrument in een gesloten box en keek Cavendish met telescopen door twee kleine openingen om de verdraaiing te meten. Het doel van het experiment was echter niet om G te bepalen, maar om de dichtheid van de aarde te meten. Pas 75 jaar na het experiment werd uit de metingen van het experiment de G bepaald op 6,74 . 10^{-11} Nm^2kg^{-2}, dit is maar 1% afwijkend van de op dit moment bekende waarde. De huidige waarde is nog steeds maar zeker tot op drie significante cijfers, en dit komt o.a. doordat er altijd invloeden zijn van andere voorwerpen in de omgeving en omdat de G geen connectie heeft met andere natuurconstanten, waardoor er geen indirecte manier is om G te bepalen. De waarden die bepaald worden met hedendaagse experimenten variëren tussen de 6,67 en 6,69. 10^{-11} Nm^2kg^{-2}.

3.1 Newton en de wetten van Kepler

De wetten van Kepler, zagen we eerder, waren zuiver empirische wetten. Er was geen theoretische basis om deze wetten te ondersteunen. Door het werk van Newton werd deze basis echter gevonden, en Newton kon dan ook deze wetten direct uit zijn formules afleiden. De eerste wet van Kepler kon Newton met een aantal aannames, die we nu niet zullen behandelen, bewijzen. De tweede wet van Kepler is vrij gemakkelijk zonder formules inzichtelijk te maken als we kijken naar fig. 7. De tweede wet van Kepler luidt: Een planeet beweegt langs zijn ellipsbaan met een snelheid die zo verandert dat de lijn die de planeet met de zon verbindt in gelijke tijden gelijke oppervlakken bestrijkt.

Figuur 7 : De verandering van de snelheid (2e wet van Kepler) verklaard door Newton.

Stel er is een planeet in een (sterk overdreven) elliptische baan. Wanneer de planeet zich op punt A bevindt dan werkt de kracht in de richting van de zon. Deze kracht staat niet loodrecht op de beweging, zoals in een cirkelvormige baan. Er is dus een stukje van de kracht in de richting van de baan gericht, en die zorgt ervoor dat de planeet steeds sneller gaat. In punt B is er juist een stukje van de kracht die tegen de beweging in gaat, en de planeet remt dus af. Dit komt volledig overeen met de tweede wet van Kepler. Deze wet voorspelde namelijk dat een planeet in zijn perihelium het snelst bewoog en in zijn aphelium het traagst.

De derde wet van Kepler volgens Newton

Newton kon met zijn model de formule voor de derde wet van Kepler opstellen voor planeten. Hij nam aan dat de gravitatiekracht die volgt uit de universele gravitatiewet (vgl. 4) gelijk moet zijn aan de middelpuntzoekende kracht die nodig is voor een cirkelbeweging (vgl. 3) (Er wordt voor gemiddelde afstand de *halve lange as* **a** van de ellips gebruikt i.p.v. de straal r omdat bij een ellipsbeweging de afstand continu verandert).

$$G\frac{m_{zon}.m_{pl}}{a^2} = \frac{m_{pl\cdot v^2}}{a} \qquad (5)$$

Er geldt dus:

$$v^2 = G\frac{m_{zon}}{a} \qquad (6)$$

Als we nu vgl. 2 invullen voor *v* dan volgt:

$$\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = G\frac{m_{zon}}{a} \Rightarrow \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = G\frac{m_{zon}}{a} \qquad (7)$$

Dit omschrijven geeft:

$$\frac{a^3(in\ m)}{T^2(in\ s)} = G\frac{m_{zon}(in\ kg)}{4\pi^2} \rightarrow \text{De derde wet van Kepler} \qquad (8)$$

Deze wet geldt ook voor manen rond planeten enz. als je voor de massa bijv. de massa van de planeet invult.

Dit is volledig vergelijkbaar met vgl. 3. uit het hoofdstuk DE ONTWIKKELING VAN ONS WERELDBEELD. Het enige verschil is dat nu de straal in meters wordt ingevuld en de omlooptijd in s. Voer je de straal in AU in en de omlooptijd in jaren dan volgt weer vgl. 3. Voor dubbelsterren, waarbij de twee sterren om een gezamenlijk middelpunt draaien, geldt de volgende formule:

$$\frac{a_{(AU)}^3}{T^2} = \frac{m_{ster1} + m_{ster2}}{m_{zon}} \quad (9)$$

Voorbeeld
Stel je doet waarnemingen aan een dubbelster met een telescoop. Uit de waarnemingen blijkt dat de omlooptijd van het systeem 4 jaar is en dat de gemiddelde afstand tussen de twee sterren 8 AU is. Dan blijkt dat:

$$\frac{8^3}{4^2} = 32 = \frac{m_{ster1} + m_{ster2}}{m_{zon}} \quad (10)$$

Dus de totale massa van de twee sterren is 32x de massa van de zon. We kunnen echter nog niks zeggen over de afzonderlijke massa's, daar hebben we nog één gegeven voor nodig.

Opgave 2: verwerking: Derde wet Kepler

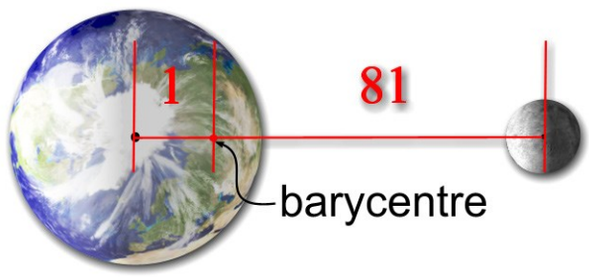
Een satelliet draait rond de maan met een omlooptijd van T=11,5 h op een gemiddelde afstand van het middelpunt van de maan van 5.960 km. Wat is de massa van de maan?

Opgave 3: Manen van Jupiter

Zoek de gegevens op van Jupiter en zijn 4 grote manen (Io, Europa, Ganymedes en Callisto). Toon aan dat de 3e wet van Kepler ook geldt voor het Jupiter-maan systeem.

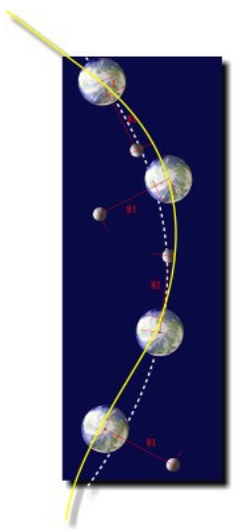
Het massamiddelpunt

Twee objecten die om elkaar heen draaien, bewegen rondom het zogenaamde massamiddelpunt van de twee objecten. Dit massamiddelpunt kun je vergelijken met het draaipunt bij momenten. Als je bijvoorbeeld kijkt naar de aarde en de maan dan heeft de aarde een 81x zo grote massa dan de maan. Dan zal het massamiddelpunt ook 81x zo dicht bij de aarde te vinden zijn dan bij de maan (zie fig. 8).

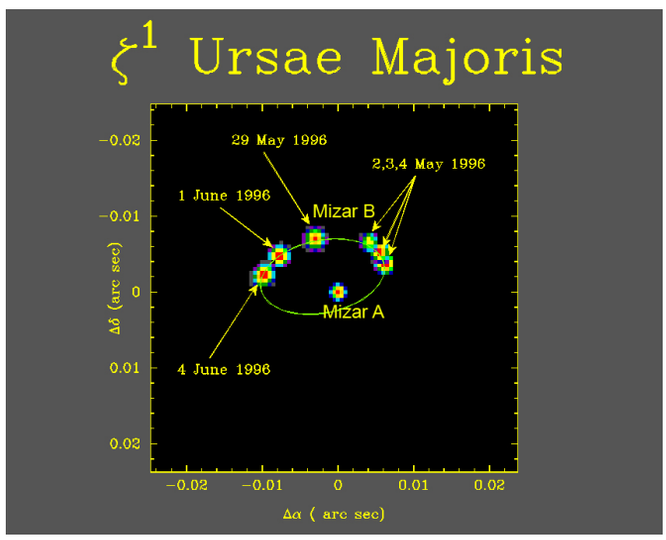


Figuur 8: Het massamiddelpunt van het aarde-maan systeem ligt 81 x zo dicht bij de aarde dan bij de maan.

De aarde en de maan draaien dus als het ware om dit punt heen (zie fig. 9). Het was deze waarneming die ons, totdat het ruimtevaarttijdperk aanbrak, in staat stelde de massa van de maan te bepalen.



Figuur 9: De beweging van de aarde en de maan om hun gezamenlijk massamiddelpunt.

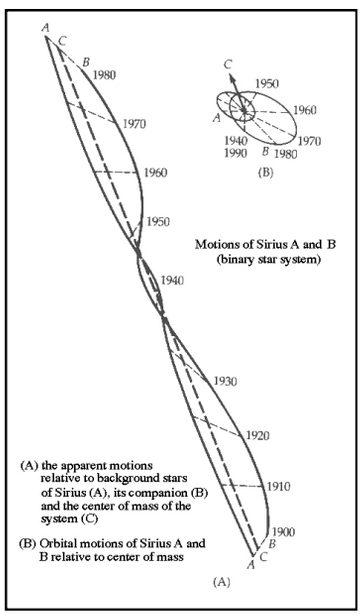


Figuur 10: De beweging van de sterren Mizar A en B om hun gezamenlijk massamiddelpunt. Welke ster is het zwaarst?

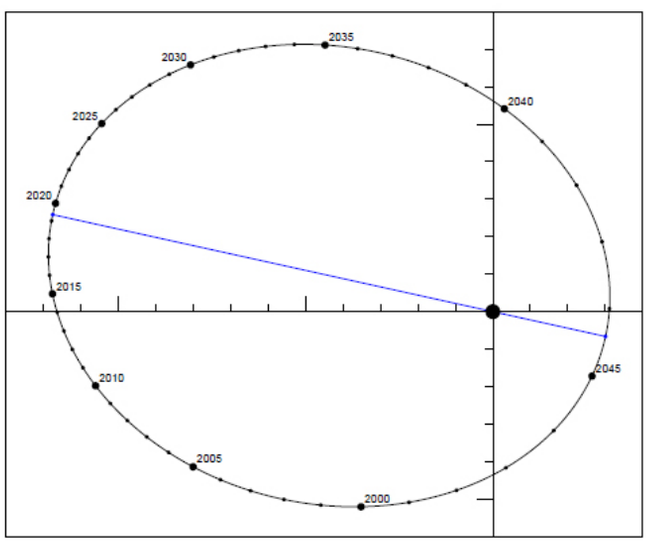
In het vorige voorbeeld zagen we dat de totale massa van de dubbelsterren 32x de massa van de zon was. Stel dat je ziet dat ster 1 3x zo ver van het massamiddelpunt verwijderd is dan ster 2. Dan heeft ster 2 3x de massa van ster 1, en weet je dus dat ster 1 8x de massa van de zon en ster 2 24x de massa van de zon heeft.

Opgave 4: verwerking: Sirius, een dubbelster

Sirius is de helderste ster die we aan de hemel kunnen zien. Al in 1844 zag Friedrich Bessel dat de ster geen rechte lijn langs de hemel beschreef, maar een beetje golvende lijn. Hieruit viel af te leiden dat Sirius een dubbelster moet zijn. In 1862 werd deze tweede ster ook daadwerkelijk waargenomen. In fig. 11 zie je de beweging van Sirius aan de hemel. In fig. 12 zie je de ellipsbaan die de tweede ster Sirius-B beschrijft om Sirius-A. Met behulp van deze twee figuren gaan we nu zelf de massa's van de twee sterren bepalen.
Figuur 11: De slingerbeweging van Sirius laat duidelijk zien dat dit een dubbelster is.



Figuur 11: De slingerbeweging van Sirius laat duidelijk zien dat dit een dubbelster is.



Figuur 12: De beweging van Sirius-B om Sirius-A. Elke streepje op de as stelt 1" voor.

a Wat is de omlooptijd van Sirius-B in jaren?

b Sirius blijkt een parallax te vertonen van 0,375". Wat is de afstand tot Sirius in lichtjaren?

c Bepaal uit de figuur wat de gemiddelde afstand in boogseconden is tussen Sirius-A en B (Tip: de gemiddelde afstand is gelijk aan de halve lange as van de ellips).

d Bereken wat de afstand is in AU tussen de twee sterren. (Tip: zie ook opg. 6 uit DE ONTWIKKELING VAN ONS WERELDBEELD).

e Bereken m.b.v. vgl. 9 de totale massa van de twee sterren (in zons-massa's).

f Bepaal uit de linkerfiguur de verhouding van de afstanden van de twee sterren.

g Bereken de afzonderlijke massa's van de twee sterren (in zons-massa's).[1]

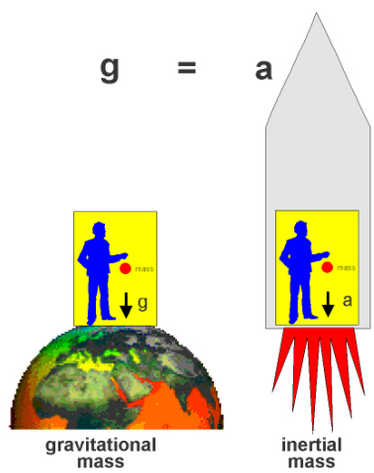
[1] Werkelijke waarden: Sirius-A 2,35x, Sirius-B 0,99x, onderlinge afstand 20 AU.

4 Newton voorbij

In de wetenschap zoeken we constant naar verbanden, en proberen we verschijnselen via eenvoudige principes aan elkaar te knopen. We hebben gezien hoe Newton de planeetbewegingen kon verklaren met zijn bewegings- en zwaartekrachtswetten. Dankzij Newton's wetten werden o.a. de getijden op aarde verklaard en kon men afleiden dat de planeet Neptunus moest bestaan, voordat men hem met een telescoop gezien had. Je zou dan ook kunnen concluderen dat de wetten van Newton belangrijke basiswetten zijn voor de natuurkunde. Ze verklaren bewegingen op een wiskundige manier, zijn te testen en ze passen met andere wetten zoals die van Kepler. We noemen dan ook de natuurkunde gebaseerd op de wetten van Newton wel de Newtonse mechanica, of ook wel de klassieke mechanica. Newton was er in geslaagd een eenduidig model te maken dat zowel op aarde als in de ruimte geldig was. Het zou duren tot de 20e eeuw totdat men ontdekte dat ook de wetten van Newton niet altijd geldig waren en dat er dus een uitbreiding op deze wetten nodig was.

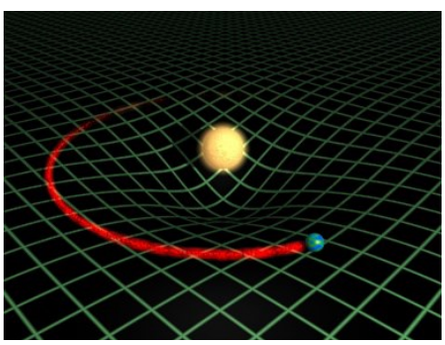
4.1 De algemene relativiteitstheorie

Massa is een maat voor de traagheid van een voorwerp. Het zegt iets over hoe gemakkelijk een voorwerp van snelheid kan veranderen. Massa is volgens Newton ook de grootheid die aangeeft hoe groot de aantrekkingskracht van een voorwerp is. Dit zijn toch twee totaal verschillende begrippen, maar ze hebben wel dezelfde eigenschap nodig. Dit is zeker geen toeval, en dus wilden wetenschappers weten wat het verband was tussen deze twee begrippen. Het was Einstein die dit probleem aan zou pakken en in zijn algemene relativiteitstheorie zou oplossen. Zijn theorie stelde als beginvoorwaarde dat zwaartekracht en versnelling blijkbaar één en hetzelfde begrip moet zijn. Een persoon in een raket (zie fig. 13 links) laat een voorwerp vallen als de raket nog stil staat op aarde. Dezelfde persoon laat later het voorwerp weer vallen, maar nu in een raket die heel ver van de aarde vliegt zodat de F_z gelijk is aan 0. De raket vliegt met een constante versnelling van 9,81 m/s^2 door de ruimte. Hij zal het voorwerp op exact dezelfde manier zien vallen als op aarde. Hij kan geen verschil maken tussen vallen ten gevolge van een zwaartekracht of vallen ten gevolge van een versnelling.



Figuur 13: Zwaartekracht en versnelling zijn één en het zelfde begrip.

Het zogenaamde equivalentie principe van Einstein's algemene relativiteits-theorie zegt dat er geen enkel experiment is te verzinnen waarmee het verschil te bepalen is. Einstein verklaarde dit verschijnsel met behulp van ruimte-tijdkromming. Dit is een erg lastig begrip, een mogelijke uitleg is de volgende. Wij kennen allemaal drie dimensies als we een plaats op aarde beschrijven, namelijk een noord-zuid coördinaat, een oost-west coördinaat en een hoogte. Stel nu dat je hele kleine twee-dimensionale diertjes zou hebben die op het oppervlak van een hele grote ballon leven. Zij kunnen noord-zuid waarnemen, en ook oost-west, maar hebben geen besef van hoogte, het oppervlak is immers helemaal glad. Als de ballon maar groot genoeg is zullen zij nooit zien dat de ballon krom loopt. Stel nu dat één van de wezens beseft dat de ballon een bol is, hoe moet hij dit dan uitleggen? Hij kan zeggen dat de ballon omlaag loopt, maar dit heeft geen betekenis voor de anderen, want die kennen het begrip omlaag niet. Op een zelfde manier kunnen we ook de kromming van de ruimte-tijd zien. Zware voorwerpen zorgen dat de ruimte-tijd gekromd wordt. De zon, die een hele grote massa heeft, kromt de ruimte-tijd rond haar heen (zie fig. 14). Een rechte lijn langs de zon is een kromme lijn geworden. Licht dat vlak langs een zwaar voorwerp beweegt zal dus deze kromming moeten volgen. Ver van de zon is de ruimte-tijd vlak en merk je hier vrijwel niks meer van. Hoe dichter je bij de zon komt des te groter de kromming. Als de snelheid van een voorwerp goed wordt gekozen kan een voorwerp precies de kromming volgen en zo in een baan om de zon komen, net als de aarde in de figuur. Het is dus zo dat massa de ruimte-tijd laat krommen en dat de kromming dan weer bepaalt hoe een voorwerp moet bewegen. Dit klinkt als een erg zweverig verhaal, en je zou dan ook bijna gaan denken dat dit nooit zo kan zijn, maar toch zijn er inmiddels waarnemingen die aantonen dat Einstein's beeld van de ruimte waarschijnlijk toch correct is. In Newton's beeld van de zwaartekracht hebben voorwerpen op afstand een interactie met elkaar. Het éne voorwerp beïnvloedt het andere voorwerp door de lege ruimte heen. Als ik een appel loslaat begint hij onmiddellijk te vallen. Maar hoe weet de appel wanneer hij moet gaan vallen en hoe sterk de aantrekking van de aarde is? Einstein stelde voor dat in plaats van dat zwaartekracht een aantrekkende kracht is tussen twee voorwerpen, we de ruimte-tijd gekromd moeten zien door de aanwezigheid van de massa's. De voorwerpen bewegen dankzij deze kromming (in de tijd).



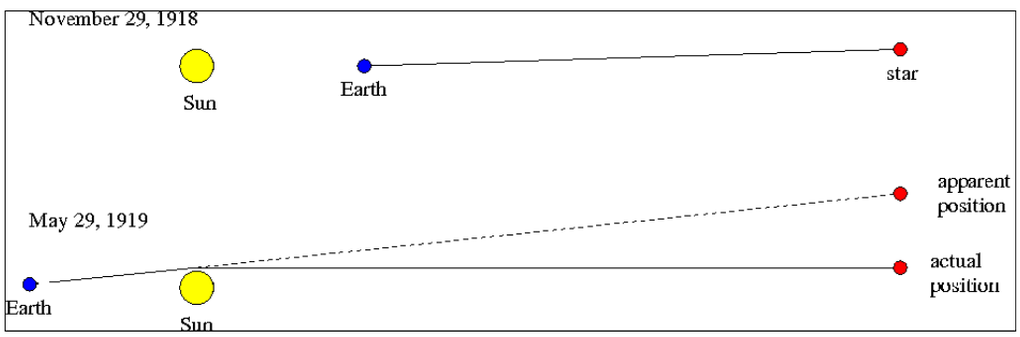
Figuur 14: De kromming van de ruimte door de zon.

4.2 Bewijzen voor de algemene relativiteitstheorie

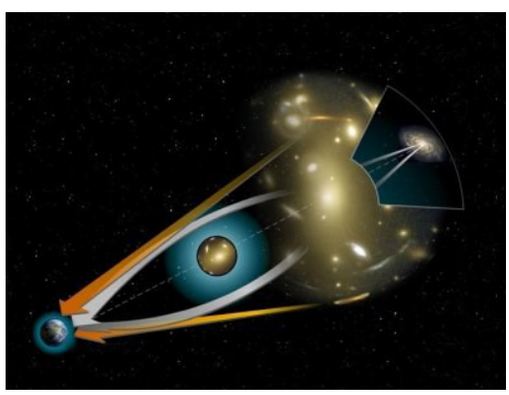
Buiging van licht door zwaartekracht

In de vorige paragraaf zagen we dat een lichtstraal door een zware massa

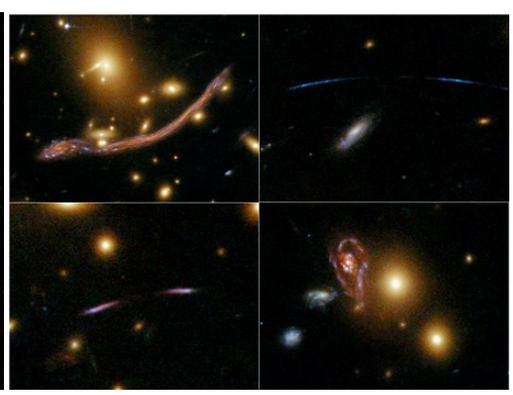
afgebogen kan worden. Dit werd voorspeld door Einstein in 1915, waarnemingen tijdens een zonsverduistering in 1919 lieten zien dat hij gelijk had. Licht van sterren die vlak langs de zon schenen tijdens de verduistering leken van een andere plaats te komen dan wanneer de zon er niet was (fig. 15). De afbuiging was zo'n 1,75 boogseconden. Newton voorspelde dat licht, omdat licht geen massa had, ook geen invloed zou ondervinden van de zwaartekracht. Omdat dit alleen gebeurt bij heel zware objecten had niemand dit ooit eerder waargenomen, en twijfelde men ook niet aan het model. Einstein's model zegt dat licht wel een effect van zwaartekracht ondervindt,



Figuur 15: De buiging van licht werd tijdens de eclips in 1919 voor het eerst waargenomen.



Figuur 16: Een dichtbijgelegen sterrenstelsel kan licht van verder weg gelegen stelsels afbuigen.



Figuur 17: Zwaartekrachtslenzen zoals waargenomen door Hubble. De gebogen lijnen bestaan uit licht van ver weg gelegen stelsels dat afgebogen wordt.

omdat ook licht de kromming van de ruimte moet volgen. Einstein's model voorspelt ook dat licht in de ruimte afgebogen kan worden als licht van ver weg gelegen sterrenstelsels door daarvoor gelegen zware sterrenstelsels heen moet. Dit noemen we ook wel *zwaartekrachtslenzen.* Deze zijn inmiddels door de Hubble Space Telescope al vele malen waargenomen (fig. 17).

zwaartekrachtslenzen

De baan van Mercurius

precessie = verandering van baan ten gevolge van externe krachten

In 1859 berekende Urbain le Verrier dat de baan van Mercurius een *precessie* vertoonde. Fig. 19 laat dit effect duidelijk (maar sterk overdreven) zien. Het perihelium van Mercurius lijkt langzaam om de zon heen te draaien. Dit gebeurt met een snelheid van 574 boogseconden per eeuw, oftewel minder dan een graad per eeuw. De theorie van Newton kan deze precessie verklaren door de aantrekkingskracht van andere planeten, vooral

Venus en Jupiter. Maar de waarde die uit deze berekeningen volgt is 531 boogseconden per eeuw. De andere 43 boogseconden per eeuw waren tot 1915 een mysterie voor astronomen. Volgens één theorie zou er nog een planeet, Vulcan, dicht bij de zon moeten draaien om dit verschijnsel te verklaren. Deze planeet werd nooit gevonden. Einstein paste zijn algemene relativiteitstheorie toe en vond dat hij precies uitkwam op de waargenomen waarde. Hij schreef later dat hij "een paar dagen lang buiten zinnen was van geluk". Net zoals Newton's theorie voorspelt de algemene relativiteitstheorie de precessie met behulp van de aantrekkingskrachten van de planeten, maar daarnaast voorspelt het ook een extra precessie ten gevolge van de ruimtekromming. Dus, het was de zon zelf die voor de afwijking zorgde.

Roodverschuiving door zwaartekracht

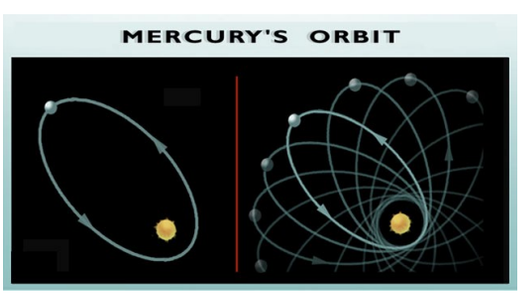
Ieder lichtfoton heeft een bepaalde energie bij zich. De energie (in J) hangt af van de frequentie (lees kleur) (in Hz) met het volgende verband, waarin h = $6{,}6.10^{-34}$ Js (ook wel de constante van Planck genoemd):

$$E_f = h \cdot f \tag{11}$$

Een foton dat door een zwaartekrachtsveld heengaat verliest volgens Einstein een klein beetje energie, en daardoor zal de kleur dus een beetje naar het rood verschuiven. In 1960 toonden Robert Pound en Glen Rebka aan dat een stroom gammafotonen die recht omhoog werden geschoten in een 25 m lange liftschacht op de Harvard University een hele kleine roodverschuiving vertoonde doordat de fotonen zich tegen het zwaartekrachtsveld van de aarde in moesten worstelen. De voorspelde verschuiving was maar $2{,}5.10^{-13}$ %. De waargenomen verschuiving zat hier maar 10% naast de voorspelde waarde!!! Tot slot voorspelt Einstein ook het bestaan van *zwaartekrachtsgolven*. Als een voorwerp zoals de zon op en neer beweegt op zijn plaats moeten er ook zwaartekrachtsgolven ontstaan in de ruimtekromming die zich verplaatsen met de lichtsnelheid. Eén van de experimenten om deze golven aan te tonen was te vinden op de universiteit van Leiden. Hier hing een bol met een eigenfrequentie die zodanig is dat hij dicht ligt bij de voorspelde zwaartekrachtsgolven van neutronensterren. Hiermee hoopte men het bestaan van deze golven aan te kunnen tonen. Het instrument was echter niet gevoelig genoeg (fig. 18). Meer succes had de LIGO detector (fig. 20). Hiermee is in 2015 voor het eerst het bestaan van gravitatiegolven aangetoond.

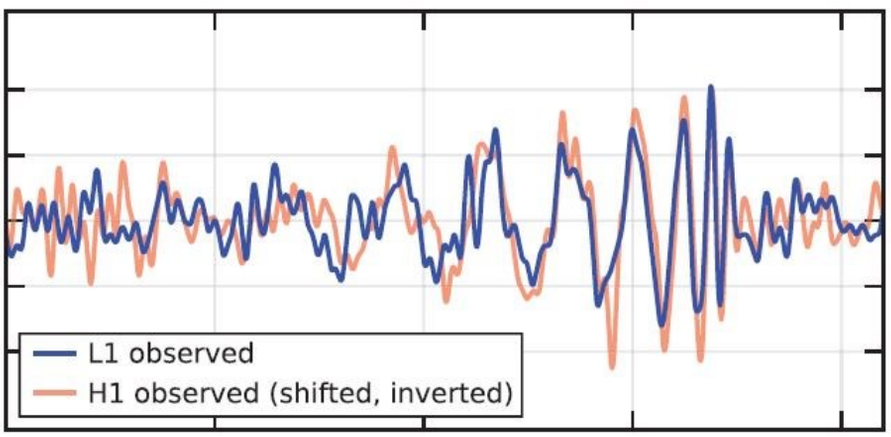
zwaartekrachtsgolven

Figuur 18: Het Minigrail instrument.



Figuur 19: De baan van Mercurius lijkt langzaam rond de zon te draaien. Dit heet ook wel precessie.

Figuur 20: De LIGO detector in Amerika. Deze bestaat uit twee tunnels van 4 km lang waar lichtstralen doorheen gestuurd worden. Door zwaartekrachtsgolven veroorzaakt door het instorten van zwarte gaten in het heelal voorspelt Einstein een lengteverandering van de buizen van 10^{-18}m. Dit is waarneembaar met zeer nauwkeurige meetapparatuur.



Figuur 21: Het samensmelten van twee zwarte gaten geeft een signaal waarvan de vorm met de computer berekend kan worden. De twee detectoren in Louisiana (L1) en Hanford (H1) signaleerden identieke signalen met een looptijdverschil van 10 ms. Hierdoor wist men dat het geen stoorsignalen waren en dat gravitatiegolven zich met de lichtsnelheid voortplanten.

5 Conclusie

Correspondentieprincipe = het idee dat voorspellingen van een nieuwe theorie overeen moeten komen met de theorie die het vervangt wanneer de oude theorie zijn juistheid heeft aangetoond, voor het eerst gebruikt door Niels Bohr.

Er is een algemeen principe in de wetenschap over de vervanging van oude theorieën door nieuwe. Het *correspondentieprincipe* zegt dat voorspellingen van een nieuwe theorie overeen moeten komen met de oude theorie, als de juistheid hiervan is aangetoond. Dit klinkt erg redelijk. In het vorige hoofdstuk zagen we twee modellen, het model van Ptolemeus en dat van Copernicus, later aangepast door Kepler. In dit hoofdstuk zagen we hoe de waarnemingen van Galileo de resultaten van Kepler bevestigden en hoe Newton hier op uitbreidde door een meer universeel beeld van de ruimte te geven. Nu weten we dat Newton's ideeën inmiddels vervangen zijn door die van Einstein. En hoewel de resultaten van de relativiteitstheorie niet overeen lijken te komen met onze dagelijkse beleving, heeft hij zijn positie wel veroverd in de wetenschap. Wie weet leren we deze theorie ooit wel standaard op school. Het is niet alleen mogelijk, maar zelfs zeer waarschijnlijk dat de theorieën van Einstein in de toekomst weer vervangen worden door nieuwe theorieën die het heelal nog preciezer beschrijven.

Afleiding van de wetten van Kepler

1 Inleiding

Ofschoon Kepler uiteindelijk in staat is geweest om vast te stellen dat de planeetbanen de meer algemene vorm van een ellips aannamen en niet die van een cirkel, kon hij de aard van de kracht, die de planeten zo precies in hun baan hield, niet verklaren.

Newton kon niet alleen een wiskundige uitdrukking voor die kracht vinden, hij was ook in staat om de empirische wetten van de planeetbeweging uit de wet van de gravitationele kracht af te leiden. Deze afleiding van de wetten van Kepler betekende een cruciale stap in de ontwikkeling van de moderne fysica.

Het zal opvallen dat in de theorie van Newton de werking van de zwaartekracht zich in de ruimte niet uitbreidt met de lichtsnelheid, voor Newton is er een actie-op-afstand, een ogenblikkelijke werking. Wanneer tussen twee hemellichamen een bepaalde afstand is bereikt worden door die hemellichamen de kracht die bij die afstand behoort ogenblikkelijk gevoeld. Newton was zich bewust hoe vreemd dit eigenlijk was. In een brief aan Bentley schrijft hij hierover:

> *"It is inconceivable that inanimate Matter should, without the Mediation of something else, which is not material, operate upon, and affect other matter without mutual Contact…That Gravity should be innate, inherent and essential to Matter, so that one body may act upon another at a distance thro' a Vacuum, without the Mediation of any thing else, by and through which their Action and Force may be conveyed from one to another, is to me so great an Absurdity that I believe no Man who has in philosophical Matters a competent Faculty of thinking can ever fall into it. Gravity must be caused by an Agent acting constantly according to certain laws; but whether this Agent be material or immaterial, I have left to the Consideration of my readers."*

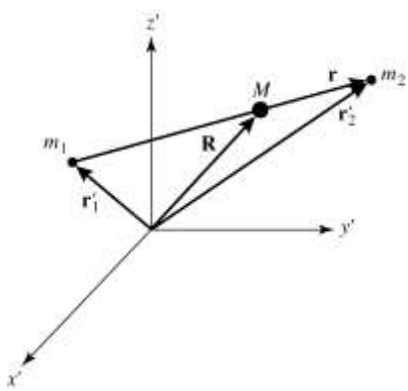
Wanneer men probeert binnen de theorie van Newton een *eindige* snelheid (de lichtsnelheid) voor de zwaartekrachtswerking in te voeren komt men in de problemen. Men krijgt geen stabiele banen. In de algemene relativiteitstheorie, waar de werking met de lichtsnelheid gaat, doet zich dat probleem niet voor.

Voor de afleiding zullen we gebruik maken van de vectorrekening. In bijlage 1 wordt een inleiding gegeven in het werken met vectoren. Kennis van deze vectorrekening is noodzakelijk voor het begrijpen van de afleiding.

2 Het referentiestelsel van het massamiddelpunt

Het is, voor we de wetten van Kepler afleiden, nuttig om de dynamica van de baanbeweging nader te bekijken. Het probleem van een tweelichamen-

stelsel, zoals bij een dubbelstersysteem, of het meer algemene probleem van het N-lichamenstelsel kan het beste worden aangepakt door uit te gaan van een referentiestelsel dat het zgn. massamiddelpunt in de oorsprong heeft. We herhalen hier dus een stukje natuurkunde over het massamiddelpunt.
In fig. 1 is een *willekeurig gekozen* Cartesisch coördinatenstelsel voor de drie ruimtelijke dimensies getekend met als assen x', y', z'.



Figuur 1: willekeurig coördinatenstelsel waarin aangegeven het massamiddelpunt M.

Fig. 1 laat twee lichamen zien met massa $m_1$en m_2 waarvan de posities door de vectoren $\mathbf{r}_1'$ en $\mathbf{r}_2'$ worden aangegeven. De verschilvector van $\mathbf{r}_1'$ en $\mathbf{r}_2'$ is gegeven door

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'$$

We definiëren nu een positievector $\mathbf{R}$ die het *gewogen* gemiddelde aangeeft van alle positievectoren van de afzonderlijke massa's.

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_i^{'}+m_2\mathbf{r}_2^{'}}{m_1+m_2} \qquad (1)$$

We kunnen deze definitie natuurlijk onmiddellijk omwerken tot het algemene geval voor n lichamen.

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

We herschrijven deze vergelijking zodat we krijgen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i'$$

Als M de totale massa van het stelsel is, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, dan gaat de vorige vergelijking over in

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{r}_i'$$

Als we aannemen dat de afzonderlijke massa's niet veranderen in de tijd kunnen we beide kanten van de vergelijking naar de tijd differentiëren en krijgen dan

$$M\,\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{d\mathbf{r}_i'}{dt}$$

of

$$M\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i'$$

De rechterzijde van de vergelijking staat voor de som van de impulsen van ieder deeltje in het systeem. De totale impuls van het systeem mag dus behandeld worden alsof *alle* massa M door $\mathbf{R}$ wordt aangewezen, en dat deze massa beweegt met een snelheid $\mathbf{V}$.
$\mathbf{R}$ wijst dus het massamiddelpunt van het systeem aan en $\mathbf{V}$ is de snelheid van dit massamiddelpunt.
Als we $\mathbf{P} \equiv M\mathbf{V}$ de impuls van het massamiddelpunt laten zijn en $\mathbf{p}_i' \equiv m_i\mathbf{v}_i'$ de impuls van een afzonderlijk deeltje i, en we opnieuw beide kanten naar de tijd differentiëren geeft dat

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{p}_i'}{dt}$$

Als we aannemen dat alle krachten die op de afzonderlijke deeltjes werken het gevolg zijn van de andere deeltjes in het systeem, eist Newton's derde wet dat de totale kracht nul moet zijn. Deze voorwaarde komt voort uit de gelijke grootte maar tegengestelde richting van actiereactie paren.
Natuurlijk kan de impuls van ieder deeltje veranderen. Als we uitgaan van massamiddelpunt grootheden vinden we dat de totale kracht op het systeem gelijk is aan

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\,\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = 0$$

We leiden hieruit af dat het massamiddelpunt niet versnelt als er geen uitwendige krachten werkzaam zijn. Hieruit volgt dat een referentiestelsel gekoppeld aan het massamiddelpunt een inertiaalsysteem moet zijn (er is geen versnelling) en dat het N-lichamen probleem vereenvoudigd kan worden door een coördinatensysteem te kiezen met als oorsprong het massamiddelpunt, dat in rust is met $\mathbf{R} = 0$.

Als we de oorsprong van ons coördinatenstelsel verschuiven in de richting van $\mathbf{R}$ (zie fig. 1) gaan de vectoren $\mathbf{r}_1'$ en $\mathbf{r}_2'$ over in de vectoren $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$ (zie fig. 2).

We zullen bij de afleiding van de wetten van Kepler kiezen voor een *twee-lichamenstelsel*. Dit doen we omdat voor drie of meer lichamen een analytische oplossing niet mogelijk is.

Indien we dus voor een tweelichamensysteem een referentiesysteem kiezen met de oorsprong in het massamiddelpunt (zie fig. 2) ($\mathbf{R} = 0$) dan wordt vgl. 1

$$\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = 0 \tag{2}$$

waarin de accenten zijn weggelaten, we werken met massamiddelpunt coördinaten. Zowel $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$ kunnen nu herschreven worden in termen van de verplaatsingsvector $\mathbf{r}$. Hoewel hij niet getekend is in fig. 2, ligt vector $\mathbf{r}$ nog tussen m_1 en m_2 en is positief te rekenen. De vector $\mathbf{r}_1$ wijst in de negatieve richting. Uit vgl. 2 volgt

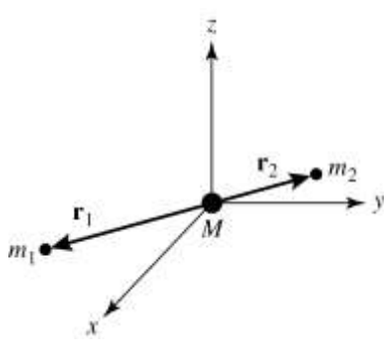
$$m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r}_2 = 0 \tag{3}$$

Als we hierin substitueren $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$ geeft dit

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r} \tag{4}$$

Als we in vgl. 3 substitueren $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$ geeft dit

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} \tag{5}$$



Figuur 2: Coördinatenstelsel voor een tweelichamensysteem gebaseerd op het massamiddelpunt waarbij de oorsprong van het coördinatenstelsel in het massamiddelpunt is geplaatst.

Bij de volgende stap definiëren we de **gereduceerde massa**

$$\boxed{\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}} \tag{6}$$

Dan worden $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \tag{8}$$

Het gemak van het coördinatenstelsel gebaseerd op het massamiddelpunt wordt duidelijk wanneer de totale energie en het impulsmoment van de baan bekeken worden. Met de kinetische en potentiële energie kan de totale energie als volgt worden berekend

$$E = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_2|^2 - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

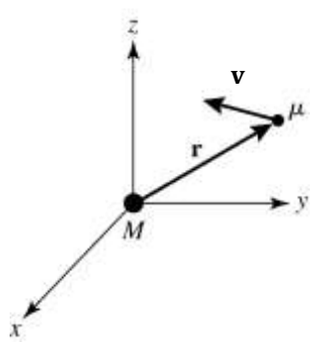
Na substitutie van de relaties voor $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$, samen met de uitdrukking voor de totale massa van het systeem en de definitie van de gereduceerde massa krijgen we

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{M\mu}{r} \tag{9}$$

waarin $v = |\mathbf{v}|$ en $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}/dt$. We hebben ook gebruikt de notatie $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. De totale energie van het systeem is gelijk aan de kinetische energie van de gereduceerde massa plus de potentiële energie van de gereduceerde massa die rond een massa M beweegt, die geacht wordt een vaste plaats te hebben in de oorsprong. De afstand tussen μ en M is gelijk aan de afstand tussen de lichamen met massa's m_1 en m_2.

Op gelijke wijze wordt het totale impulsmoment

$$\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2$$



Figuur 3: Een tweelichamensysteem kan worden teruggebracht tot het gelijkwaardige probleem om de beweging te berekenen van een gereduceerde massa μ om de totale massa M die in de oorsprong wordt gedacht.

gelijk aan

$$\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{10}$$

waarin $\mathbf{p} \equiv \mu\mathbf{v}$. Het totale impulsmoment is gelijk aan het impulsmoment van alleen de gereduceerde massa. In het algemeen kan het tweelichamen probleem worden behandeld als een equivalent éénlichaamprobleem met de gereduceerde massa μ die rondom een vaste massa M op een afstand $\mathbf{r}$ beweegt (zie fig. 3).

3 De afleiding van Kepler's eerste wet

Om Kepler's wetten af te leiden beginnen we met het bekijken van het effect van de gravitatie op het impulsmoment van een planeet. Met gebruikmaking van het massamiddelpuntstelsel en door de afgeleide te nemen naar de tijd van het impulsmoment van de gereduceerde massa (vgl. 10) krijgen we

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

waarbij de tweede uitdrukking voortkomt uit de definitie van snelheid en Newton's tweede wet. Merk op dat omdat $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$ de zelfde richting hebben, hun vectorproduct nul is. Omdat $\mathbf{F}$ een centraal gerichte kracht is langs $\mathbf{r}$, is het vectorproduct van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$ ook nul. Het resultaat is een belangrijk algemeen resultaat betreffende het impulsmoment:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \tag{11}$$

Het impulsmoment van een systeem is een constante voor een centraal gerichte krachtwet. Vgl. 10 laat verder zien dat de positievector $\mathbf{r}$ altijd loodrecht staat op het constante impulsmoment $\mathbf{L}$, wat betekent dat de baan van de gereduceerde massa in een vlak ligt dat loodrecht op $\mathbf{L}$ staat.

Gebruik makend van de radiële eenheidsvector $\hat{\mathbf{r}}$ (dus $\mathbf{r} = \mathrm{r}\hat{\mathbf{r}}$), kunnen we het impulsmoment in een alternatieve vorm schrijven als

$$\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$= \mu r\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}})$$

We passen de productregel toe

$$= \mu r\hat{\mathbf{r}} \times \left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}\right)$$

Volgens de vectoridentiteit

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$$

krijgen we

$$= \mu r \frac{dr}{dt}(\hat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{r}}) + \mu r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}$$

Omdat $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ krijgen we

$$\mathbf{L} = \mu r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}$$

In vectorvorm is de vergelijking voor de versnelling van gereduceerde massa tengevolge van het gravitatieveld uitgeoefend door M gelijk aan

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Als we het vectorproduct nemen van de versnelling van de gereduceerde massa met zijn eigen impulsmoment geeft dat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{L} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times \left(\mu r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}\right) = -GM\mu\hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}\right)$$

Met de vectoridentiteit $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ krijgen we

$$\mathbf{a} \times \mathbf{L} = -GM\mu\left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}\right]$$

Omdat $\hat{\mathbf{r}}$ een eenheidsvector is geldt $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$ en

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} = 0$$

Met als resultaat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{L} = GM\mu\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}$$

of onder verwijzing naar vgl. 11

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt}(GM\mu\hat{\mathbf{r}})$$

Door integratie naar de tijd krijgen we

$$\mathbf{v} \times \mathbf{L} = GM\mu\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D} \tag{12}$$

waarin $\mathbf{D}$ een constante vector is. Omdat $\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ en $\hat{\mathbf{r}}$ beide in het baanvlak liggen, moet $\mathbf{D}$ dat ook doen. Voorts zal de grootte van de linkerzijde van de vergelijking het grootst zijn in het perihelium wanneer de snelheid van de gereduceerde massa maximaal is. Daarboven zal de grootte van het rechterlid het grootst zijn als $\hat{\mathbf{r}}$ en $\mathbf{D}$ in de zelfde richting wijzen. Daarom is $\mathbf{D}$ gericht op het perihelium. Zoals hieronder wordt aangetoond bepaalt de grootte van $\mathbf{D}$

de excentriciteit van de baan.

We nemen vervolgens het inwendig product van vgl. 12 met de positievector $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = GM\mu r\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{D}$$

Gebruik maken van de vectoridentiteit $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ geeft

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L} = GM\mu r + rD\cos\theta$$

Wanneer we tenslotte ons de definitie herinneren van het impulsmoment (vgl. 10) krijgen we omdat $\frac{\mathbf{L}}{\mu} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ en $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L^2$

$$\frac{L^2}{\mu} = GM\mu r\left(1 + \frac{D\cos\theta}{GM\mu}\right)$$

waarin θ de hoek is van de gereduceerde massa, zoals gemeten vanaf de richting naar het perihelium. Als we definiëren $e \equiv D/GM\mu$ en voor r oplossen vinden we

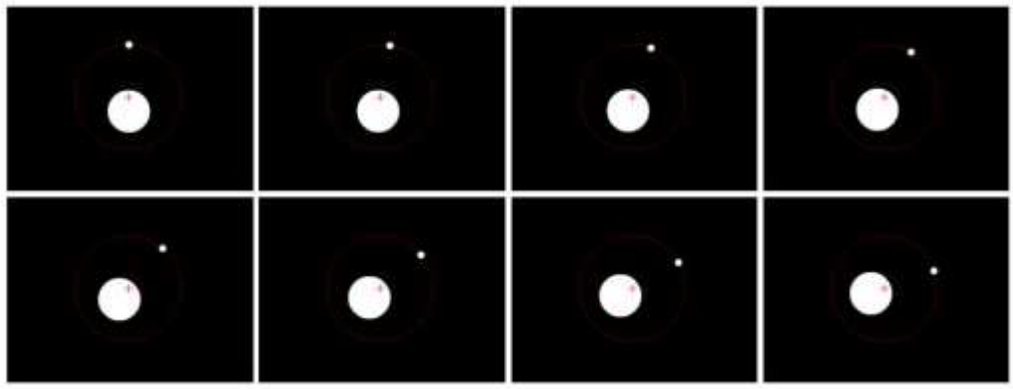
Kepler's eerste wet

$$r = \frac{L^2/\mu^2}{GM(1+e\cos\theta)} \tag{13}$$

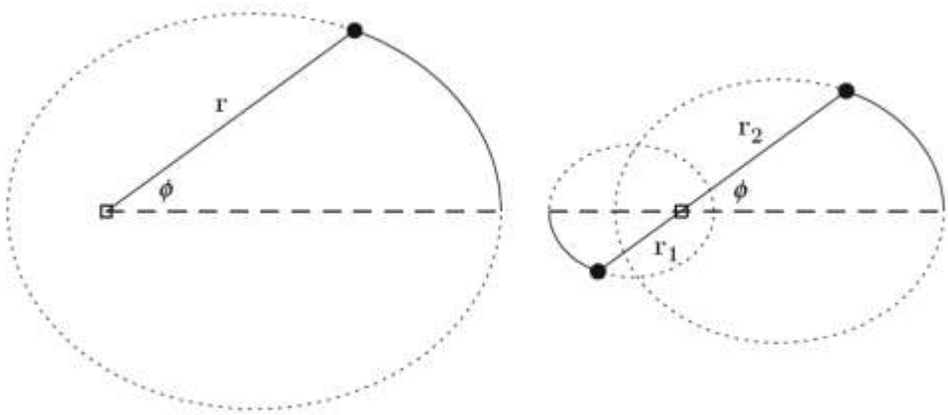
Dit is nu precies de vergelijking van een kegelsnede. Het kan een ellips, een hyperbool of parabool zijn. *Het pad van de gereduceerde massa rondom het massamiddelpunt onder de invloed van de zwaartekracht (of iedere andere kracht die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand) is een kegelsnede.*

Wanneer we vgl. 13 vertalen naar een coördinatenstelsel aan de hemel vinden we dat Kepler's eerste wet voor gebonden planetenbanen als volgt geformuleerd kan worden: *Beide objecten in een dubbel-object-systeem lopen rondom het massamiddelpunt in ellipsen waarbij het massamiddelpunt in een brandpunt van de ellipsen ligt* (zie ook fig. 5).

Newton kon de ellipsvormige baan laten zien en vond dat de eerste wet van Kepler enigszins algemener gesteld moest worden: niet het exacte middelpunt van de Zon maar het massamiddelpunt van het systeem zit in het brandpunt van de ellips. Voor ons zonnestelsel is zo'n fout te begrijpen, aangezien de grootste planeet, Jupiter, slechts 1/1000 van de zonsmassa kent. Dit brengt het massamiddelpunt van het Zon-Jupiter systeem dichtbij de oppervlak van de Zon. Omdat hij gebruik maakte van de waarnemingen die Tycho met het blote oog heeft gemaakt kunnen we Kepler wel vergeven dat hij deze fout niet heeft opgemerkt.



Figuur 5: Een tweelichamenstelsel. Beide lichamen draaien om het massamiddelpunt (rood kruisje). De middelpunten van de lichamen liggen steeds op een lijn door het massamiddelpunt. Dit volgt uit de vgl. 7 en 8.

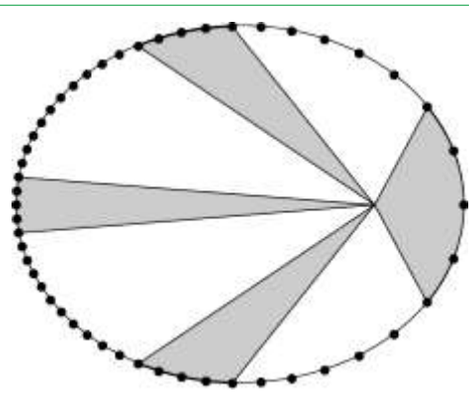


Figuur 6: In het linkerplaatje zien we de baan van de gereduceerde massa μ met de voerstraal $\mathbf{r}$. In het rechterplaatje zien we de banen van de twee lichamen met voerstralen resp. $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$.

4 De afleiding van Kepler's tweede wet

We herhalen nog even de Tweede wet van Kepler zoals we die eerder hebben gegeven.

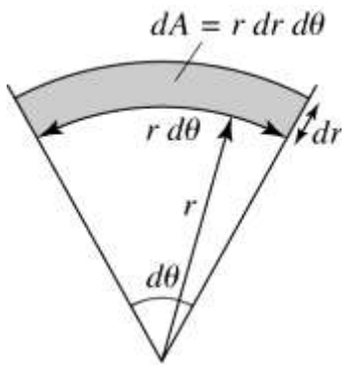
Tweede wet van Kepler (Ook wel: Perkenwet)
Een planeet beweegt langs zijn ellipsbaan met een snelheid die zo verandert dat de lijn die de planeet met de zon verbindt in gelijke tijden gelijke oppervlakken bestrijkt.



Figuur 7: In gelijke tijdsintervallen wordt een gelijk oppervlak bestreken.

Het tijdsinterval tussen de stippen op de ellips in fig. 7 is constant. Voor vier tijdsintervallen is de "perk" getekend. Deze perken hebben een gelijk oppervlak.

Kepler's Tweede wet verbindt het oppervlak van een sectie van een ellips aan een tijdsinterval.
Om Kepler's tweede wet af te leiden kijken we eerst naar een oneindig klein oppervlakte element in poolcoördinaten, zoals in fig. 8 wordt aangegeven.



Figuur 8: Het oneindig kleine oppervlakte element in poolcoördinaten.

$$dA = dr(r\,d\theta) = r\,dr\,d\theta$$

Indien we integreren vanaf het hoofdbrandpunt van de ellips naar een specifieke afstand, r, wordt het oppervlak dat door een oneindig kleine verandering in θ wordt veroorzaakt

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Hierdoor wordt de verandering per tijdseenheid van het oppervlak dat een lijn bestrijkt vanaf een punt op de omtrek van de ellips naar het brandpunt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{14}$$

Nu kan de baansnelheid $\mathbf{v}$ worden ontbonden in twee componenten, een die gericht is langs $\mathbf{r}$ en een ander die loodrecht op $\mathbf{r}$ staat.
Als $\hat{\mathbf{r}}$ en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de eenheidsvectoren zijn die resp. langs $\mathbf{r}$ en loodrecht op $\mathbf{r}$ staan, kan $\mathbf{v}$ worden geschreven (zie fig. 9) als

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{r} + \mathbf{v}_\theta = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

Als we in vgl. 14 substitueren v_θ krijgen we

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rv_\theta$$

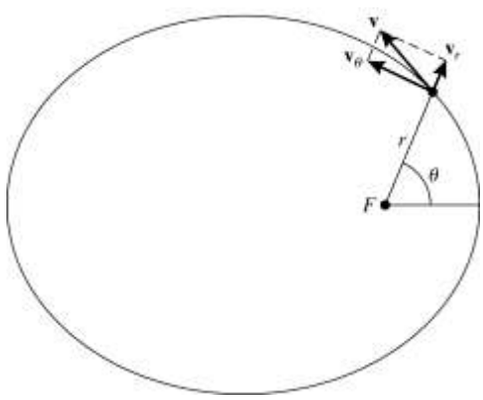
Omdat $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}_\theta$ loodrecht op elkaar staan

$$rv_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \left|\frac{\mathbf{L}}{\mu}\right| = \frac{L}{\mu}$$

Ten slotte wordt de afgeleide naar de tijd van het oppervlak

Kepler's tweede wet

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}} \qquad (15)$$



Figuur 9: De snelheidsvector voor elliptische beweging in poolcoördinaten.

We hebben reeds laten zien dat het impulsmoment een constante is, dus *is de verandering per tijdseenheid van het oppervlak die de lijn tussen brandpunt en planeet bestrijkt constant*, t.w. de helft van het impulsmoment per eenheid van massa. Dit is precies Kepler's tweede wet.

5 De afleiding van Kepler's derde wet

We herhalen nog even de Derde wet van Kepler zoals we die eerder hebben gegeven.

De derde wet van Kepler

De derde macht van de afstand van een planeet tot de zon is evenredig met het kwadraat van zijn omlooptijd, oftewel:

$$\frac{a^3}{T^2} = constant$$

Waarin:

a = gemiddelde afstand planeet-zon (ook wel de halve lange as van een ellips)

T = periode (omlooptijd) van de planeet

Als we a uitdrukken in AU en T in jaren is de constante gelijk aan 1

We zijn nu in de positie om de laatste van de wetten van Kepler af te leiden. Als we de wiskundige uitdrukking van Kepler's tweede wet over de periode P van een omloop integreren krijgen we

$$A = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}P$$

In deze uitdrukking is de massa m die rondom een veel grotere massa M draait vervangen door de meer algemene gereduceerde massa μ die rond het massamiddelpunt draait. Als we voor het oppervlak van een ellips invullen $A = \pi ab$ en de vergelijking kwadrateren en wat herschikken verkrijgen we de uitdrukking

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L^2}$$

Ten slotte maken we gebruik van $b^2 = a^2(1 - e^2)$ en de uitdrukking voor het totale impulsmoment

$$L = \mu\sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

waardoor we krijgen

Kepler's derde wet

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 \qquad (17)$$

Dit is de algemene vorm van de derde wet. Niet alleen toonde Newton de relatie aan tussen de halve grote as van een elliptische baan en de omlooptijd, hij vond ook een term die niet empirisch door Kepler was gevonden, het kwadraat van de omlooptijd is omgekeerd evenredig met de totale massa van het systeem. Opnieuw moeten we het Kepler maar vergeven dat hij dit effect niet heeft gezien. De gegevens van Tycho waren alleen voor ons zonnestelsel, en omdat de massa van de Zon zoveel groter is dan welke planeet dan ook kan je de massa van Zon en planeten ongeveer gelijk stellen aan de massa van de Zon. Als we P in jaren uitdrukken en a in astronomische eenheden wordt de verzameling constanten (inclusief de massa van de Zon) gelijk aan de eenheidswaarde.

Het belang voor de astronomie van Newton's vorm van Kepler's derde wet kan niet genoeg worden benadrukt. Deze wet geeft ons de meest directe weg om de massa van hemellichamen te verkrijgen, wat een belangrijke parameter is om een breed gebied van verschijnselen te begrijpen. De wetten van Kepler zoals we die met Newton afleiden zijn van toepassing op planeetbanen, maar ook op manen die om planeten lopen, sterren in een baan om een andere ster en melkweg-melkweg banen. Als we de periode van een baan kennen en de halve grote as van de ellips, dan kunnen we de totale massa bepalen. Indien de relatieve afstanden naar het massamiddelpunt eveneens bekend zijn, kunnen ook de individuele massa's worden bepaald.

De eigenschappen en het ontstaan van het zonnestelsel

Inleiding

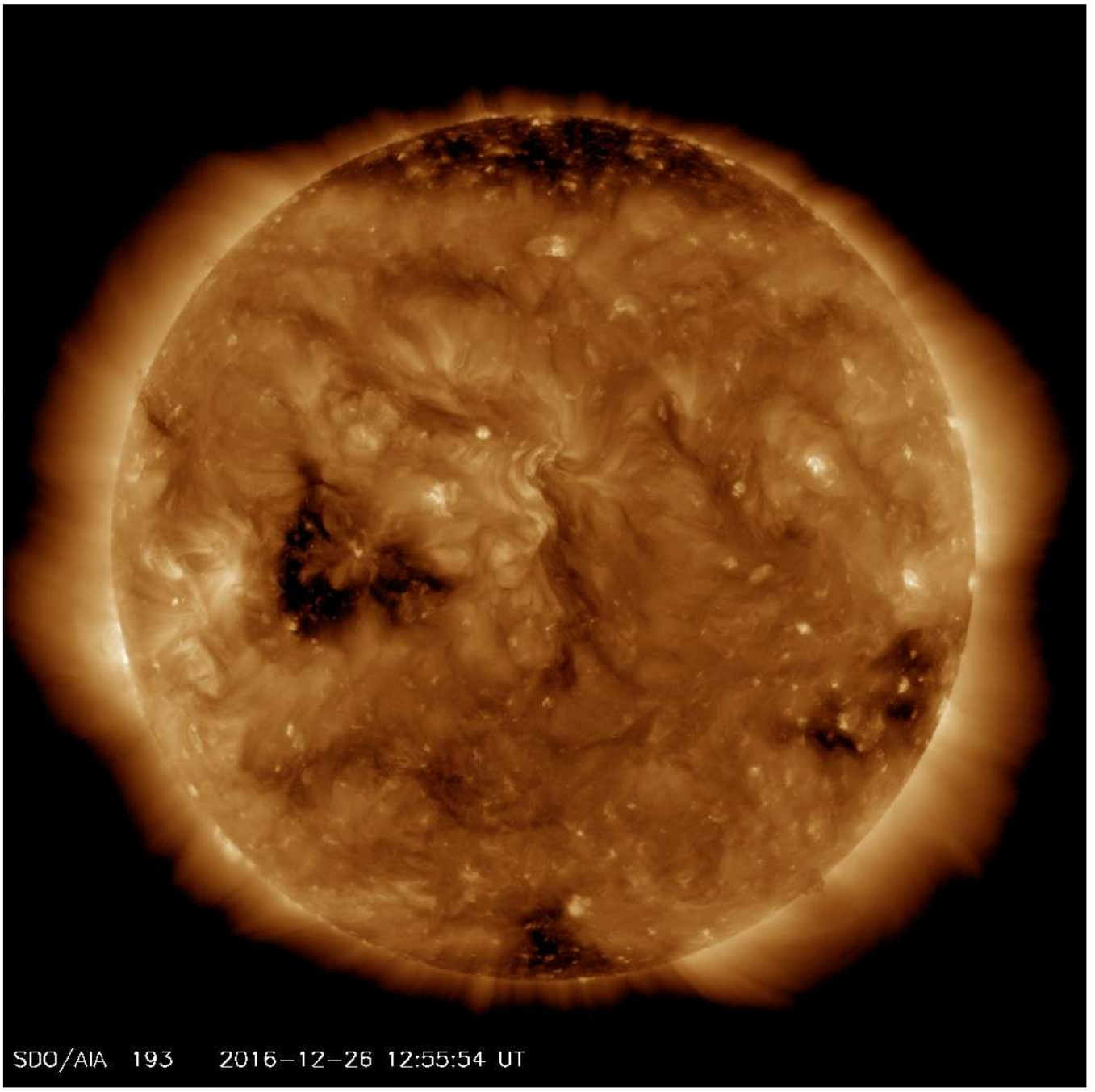
In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de eigenschappen en het ontstaan van ons zonnestelsel. Eerst bekijken we het zonnestelsel in vogelvlucht en stellen vragen zoals “Hoe ziet het zonnestelsel er uit?”, “Welke hemellichamen komen er voor in het zonnestelsel?” en “Wat zijn de fysieke en chemische eigenschappen van de hemellichamen in het zonnestelsel?”. Door deze vragen te stellen, krijgen we niet alleen een goed beeld over hoe het zonnestelsel er vandaag de dag uit ziet, maar ook hoe het zonnestelsel ontstaan moet zijn. De huidige toestand van het zonnestelsel is namelijk het resultaat van processen die ver in het verleden plaats hebben gevonden. Hier wordt in het tweede deel van dit hoofdstuk op ingegaan.

1 De eigenschappen van ons zonnestelsel

1.1 Het zonnestelsel in vogelvlucht

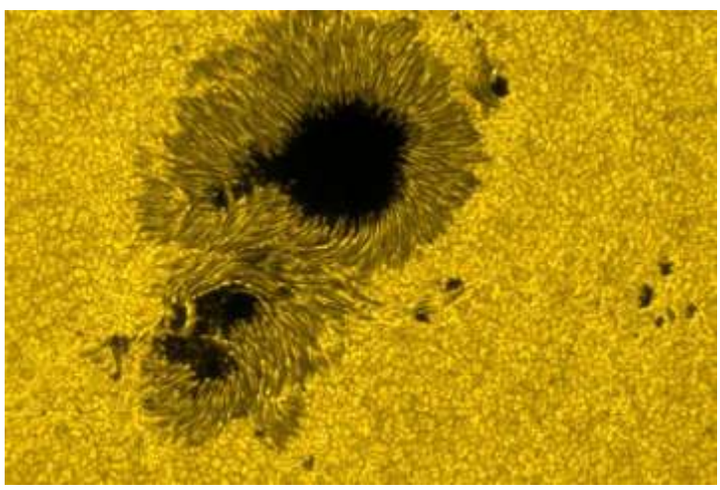
1.1.1 De zon

De zon is het grootste hemellichaam in het zonnestelsel, zowel qua grootte als qua massa. De zon heeft een diameter van 1,4 miljoen kilometer. Vergelijk dit met de diameter van de aarde, zo’n 12 à 13 duizend kilometer. Dit betekent dat de aarde 1,3 miljoen keer in de zon past. De zon bevat 99,86% van alle massa in het zonnestelsel. Heel kort door de bocht kunnen we dus zeggen dat het zonnestelsel vooral uit de zon bestaat. Echter, zo kort door de bocht kunnen we ook weer niet zijn. De overige 0,14% massa bestaat namelijk uit hemellichamen die, onder invloed van de zwaartekracht van de zon, rondom de zon draaien en het zonnestelsel zijn bijzondere karakter geeft.

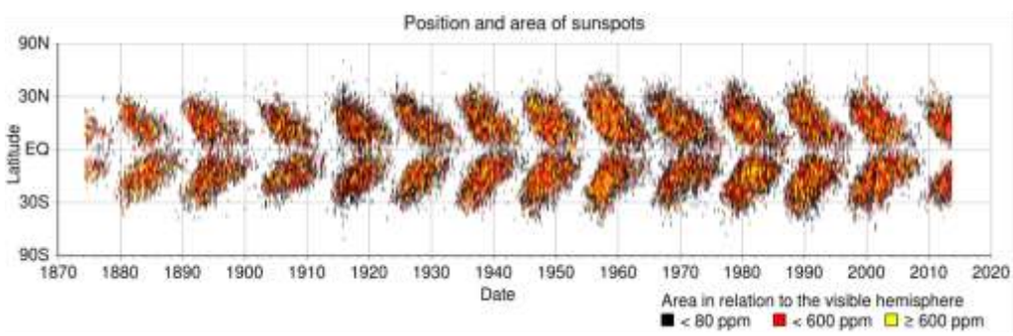


In februari 2010 werd het Solar Dynamics Observatory gelanceerd. Deze ruimtesonde heeft als taak de zon in detail, op meerdere golflengten, te bestuderen. Hierdoor tracht men inzicht te krijgen in en voorspellingen te doen over veranderlijke zonnestraling, die invloed heeft op het leven op aarde en de technologie die wij gebruiken. Vragen zijn daarbij: hoe ontstaat het magnetisch veld van de zon en welke structuur kan het krijgen. Hoe wordt de magnetische energie omgezet en hoe komt deze vrij in de heliosfeer en de ruimte in de vorm van zonnewind, energierijke deeltjes en variaties in de zonnestraling. Deze opname is gemaakt op 26 december 2016 met een golflengte van 193 Å (extreem violet).

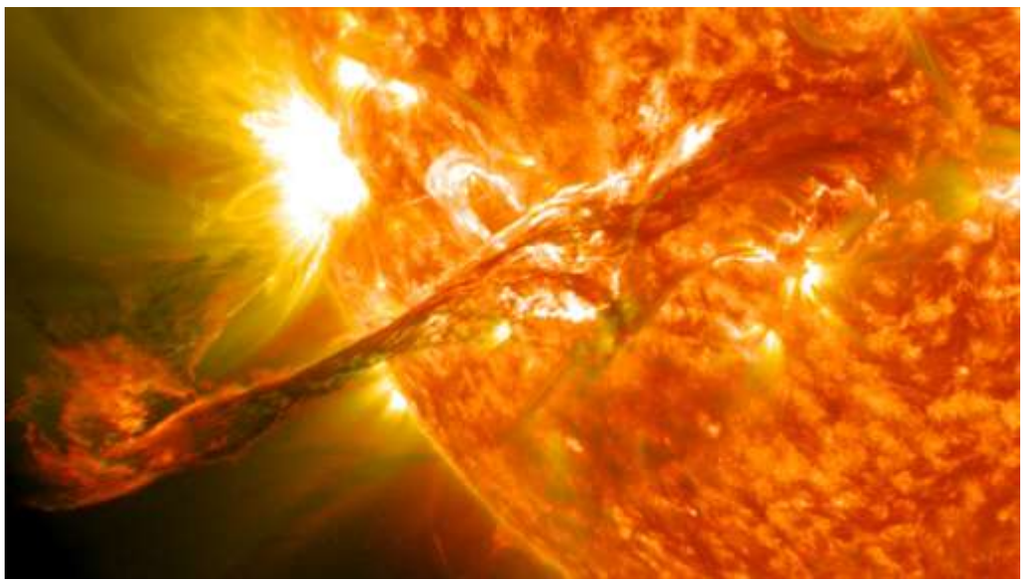
Figuur 1: De zon heeft een oppervlaktetemperatuur van 5.780 K. De energie die de zon uitstraalt is afkomstig van kernfusieprocessen in het centrum van de zon. Daar is de temperatuur voldoende hoog om deze kernfusie mogelijk te maken (15 miljoen K). De donkere vlekken zijn zonnevlekken. Dit zijn gebieden waar de temperatuur lager is dan op andere plaatsen aan het oppervlak. Door de zonnevlekken te volgen kan men concluderen dat de zon een bol is die in 25,6 dagen om zijn as draait. Deze waarde geldt voor de equator.



Figuur 2: Een zonnevlek bestaat uit een donker centraal deel (umbra) en een minder donker deel daaromheen (penumbra). Op de plaats van de umbra verhindert een magneetveld het omhoog komen van energie, hierdoor is de temperatuur ter plaatse lager dan elders. De verschijning van zonnevlekken kent een maximum dat om de elf jaar optreedt.



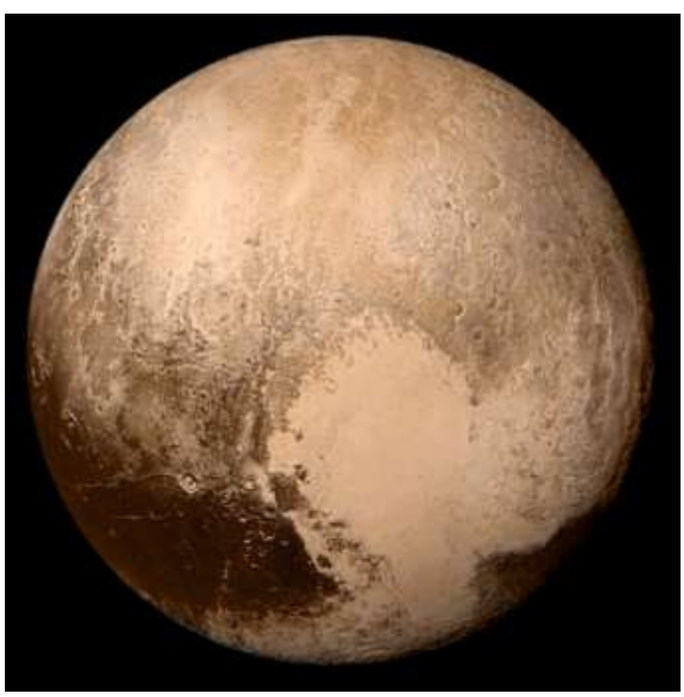
Figuur 3: Het zogenaamde vlinderdiagram geeft de elfjarige cyclus van de zonnevlekken weer. Hun positie en aantal op de verschillende breedtes op het zonsoppervlak.



Figuur 4: Een zonnevlam is een explosie op het oppervlak van de zon, die ontstaat door het plotseling vrijkomen van de energie die wordt vastgehouden in de magnetische velden. Er ontstaat straling over het hele gebied van het elektromagnetische spectrum.

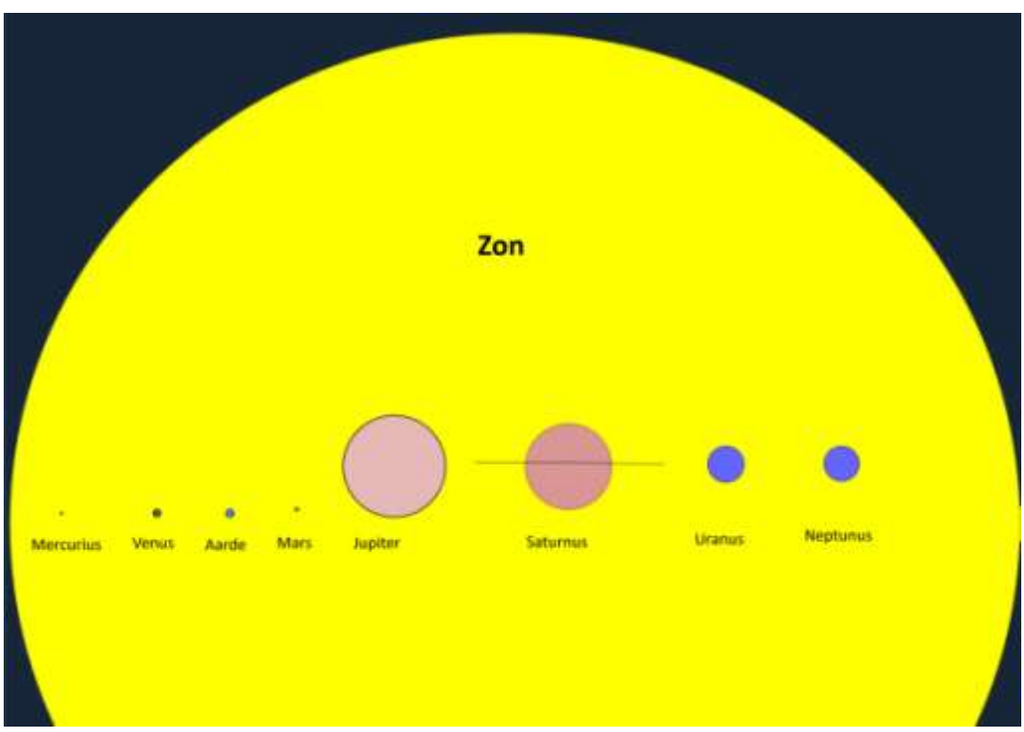
1.1.2 Planeten en dwergplaneten

De overige 0,14% massa bestaat, om mee te beginnen, uit acht planeten. Dit zijn Mercurius, Venus, de aarde, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus en Neptunus. Een planeet is een hemellichaam dat 1) rondom de zon draait, 2) voldoende massa heeft om onder invloed van zijn eigen zwaartekracht een bolvorm aan te nemen, en 3) zijn baan niet deelt met andere hemellichamen. Tot en met augustus 2006 kwam Pluto ook nog voor in de lijst met planeten, maar op 24 augustus 2006 kwam daar een einde aan, toen Pluto door de Internationale Astronomische Unie (IAU) opnieuw werd geclassificeerd als *dwergplaneet*.



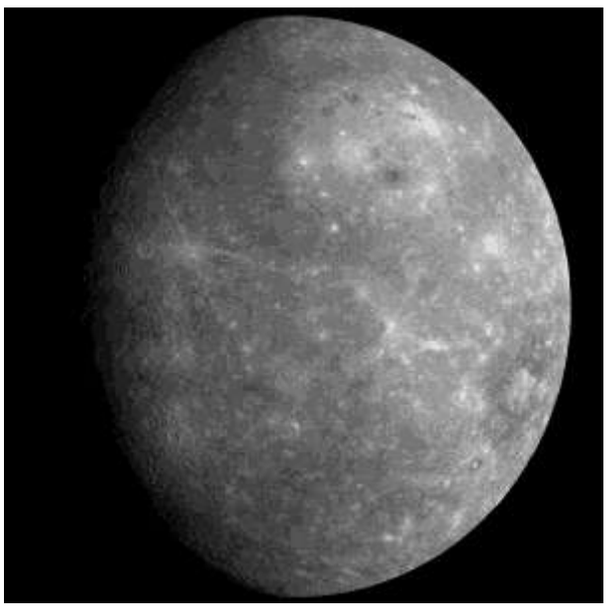
Figuur 5: Pluto is sinds 2006 niet langer een planeet maar een dwergplaneet. Op deze foto, gemaakt door ruimtesonde New Horizons op 14 juli 2015, is een lichte vlakte zichtbaar. Dit is een inslagbekken dat gevuld is met bevroren stikstof.

Een dwergplaneet is hetzelfde als een planeet, met dit verschil dat een dwergplaneet zijn baan wel deelt met andere hemellichamen.
De planeet Jupiter is, na de zon, het grootste hemellichaam in het zonnestelsel. Jupiter heeft een massa die een duizendste en een straal die een tiende van die van de zon is. Dit betekent dat Jupiter 318 keer zoveel massa heeft als de aarde en de aarde er 1.321 keer in past.
Afstanden in het zonnestelsel worden vaak uitgedrukt in zogenaamde *Astronomische Eenheden* (AE), waarbij 1 AE overeenkomt met de gemiddelde afstand tussen het centrum van de zon en het centrum van de aarde, ofwel 149,6 miljoen kilometer. Dichtbij de zon vinden we de planeten Mercurius (0,4 AE), Venus (0,7 AE), aarde (per definitie 1,0 AE) en Mars (1,5 AE). Dit zijn de zogenaamde *aardse planeten* (of *terrestrische planeten)*, planeten waarvan het oppervlak is opgebouwd uit vaste stoffen. De aardse planeten hebben een relatief kleine massa (0.06 tot 1 aardmassa's) en zijn relatief klein. Van de aardse planeten is de aarde het grootst. Veel verder bij de zon vandaan vinden we de planeten Jupiter (5,2 AE), Saturnus (9,6 AE), Uranus (19,2 AE) en Neptunus (30,1 AE). Dit zijn de zogenaamde *gasplaneten* (of *Joviaanse planeten*), planeten die voornamelijk uit gas bestaan. Deze planeten hebben relatief veel massa (15 tot 318 aardmassa's) en zijn relatief groot. Jupiter is de grootste van de gasreuzen.



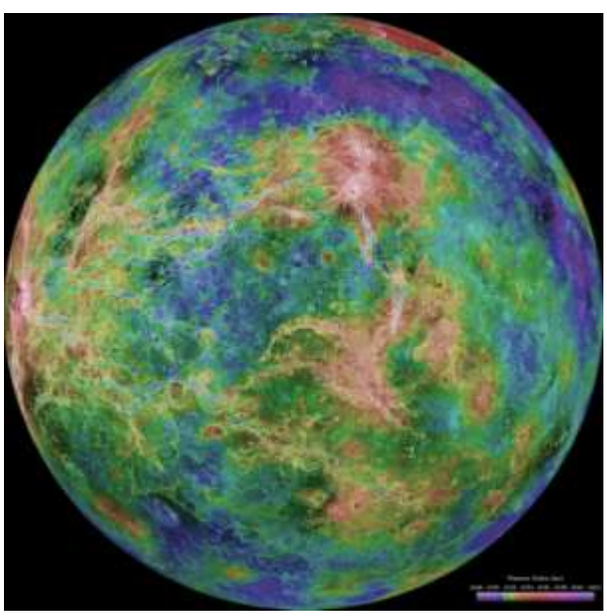
Figuur 6: De zon en de planeten qua grootte op schaal getekend.

Figuur 7: Mercurius



Massa	3.301×10^{23} kg
Gemiddelde straal	2.439,7 km
Dichtheid	5.427 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	58,6462 aardse dagen
Siderische omloopstijd	87,97 aardse dagen
Gemiddelde afstand tot zon	$5,79 \times 10^{10}$ m = 0,387 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Exosfeer	Waterstof, helium, natrium kalium atomen
Druk aan oppervlakte	10^{-12}
Oppervlaktetemperatuur	90 tot 740 K
Magnetische veldsterkte	$0,0033 \times 10^{-4}$ T aan de evenaar
Magnetische dipool moment	$5,54 \times 10^{13}$ T m^3

Figuur 8: Venus (radaropname)

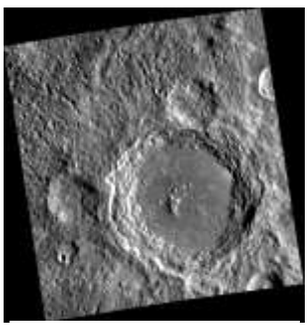


Massa	$4,867 \times 10^{24}$ kg
Gemiddelde straal	6.051,8 km
Dichtheid	5.243 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	- 243,018 aardse dagen retrograde
Siderische omloopstijd	224,7 aardse dagen
Gemiddelde afstand tot zon	$1,081\ 57 \times 10^{11}$ m = 0,723 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Exosfeer	96,5 % koolstofdioxide, 3,5 procent stikstof
Druk aan oppervlakte	92 bar
Oppervlaktetemperatuur	735 K
Magnetische veldsterkte	minder dan 3×10^{-9} T

Figuur 9: Aarde

Massa	5.972×10^{24} kg
Gemiddelde straal	6.371 km
Dichtheid	5.513 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	23 uur 56 min 4 sec
Siderische omloopstijd	365,24 dagen
Gemiddelde afstand tot zon	$1,495\ 98 \times 10^8$ km = 1 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Exosfeer	77% stikstof, 21 % zuurstof
Druk aan oppervlakte	1,013 bar op zeeniveau
Oppervlaktetemperatuur	288 tot 293 K
Magnetische veldsterkte	$0,305 \times 10^{-4}$ T aan de evenaar
Magnetische dipool moment	$7,91 \times 10^{15}$ T m^3

Mercurius



Figuur 10: De Lennon-krater, genoemd naar Beatle John Lennon.

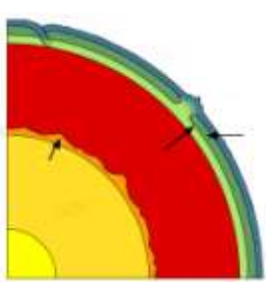
Figuur 5 is opgenomen door de Messenger satelliet in 2008. Het oppervlak van Mercurius wordt, net zoals bij de Maan, gekenmerkt door inslagkraters. Deze zijn in hoofdzaak ontstaan 3,9 miljard jaar geleden bij hevige bombardementen van meteorieten. De heldere kraters en de heldere stralen vanuit die kraters worden veroorzaakt door materiaal dat van onder het oppervlak vrijkwam bij de botsing. De rotatie-as staat loodrecht op het baanvlak, de planeet kent daarom geen seizoenen. Omdat een atmosfeer ontbreekt blijven grote temperatuurverschillen tussen permanent in de schaduw liggende delen en zonbeschenen delen in stand. In deze donkere gebieden zou zich ijs kunnen bevinden. Mercurius is moeilijk waarneembaar. De planeet bevindt zich altijd dicht bij de zon en moet dan door een dikke luchtlaag in schemering waargenomen worden.

Venus

Figuur 11: Een dicht wol-kendek van zwavelzuur-druppels onttrekt het oppervlak aan directe waarneming met het

Met radartechniek kon de Magellan satelliet een beeld krijgen van het Venus-oppervlak (fig. 6). Hoogteverschillen worden in kleur aangegeven. Het oppervlak wordt gekenmerkt door vulkanische activiteit. De atmosfeer bestaat voor 96% uit CO_2. De temperatuur op Venus van 735 K is het gevolg van het broeikaseffect. Door de hoge temperatuur kan er geen vloeibaar water zijn op de planeet. De atmosferische druk is 92 keer groter dan op aarde. De wolken die de planeet zo zichtbaar maken bestaan niet uit ijskristallen maar uit druppeltjes geconcentreerd zwavelzuur. Het zwavelzuur ontstaat doordat zwaveldioxide en waterdamp in de atmosfeer reageren tot zwavelzuur. De druppeltjes zakken in de steeds warmere atmosfeer en verdampen dan waarna ze weer opstijgen. Deze zure regen bereikt dus nooit het oppervlak van de planeet. De planeet is na zon en maan het helderste hemellichaam.

Aarde

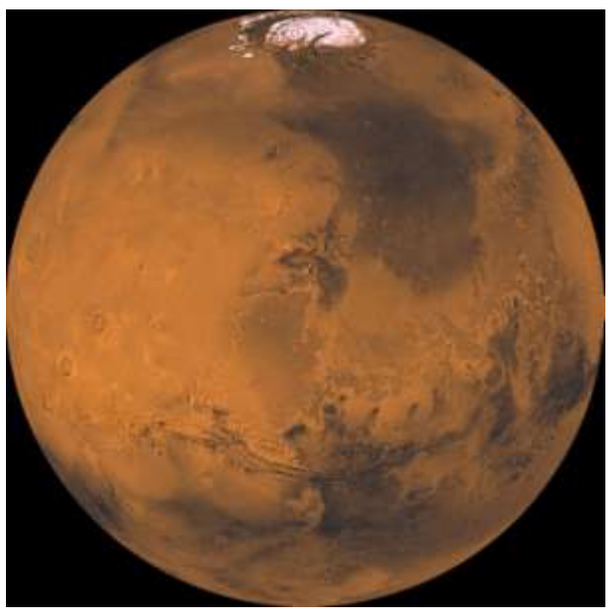


Figuur 12: opbouw van de aarde. Vaste kern (geel), vloeibare kern (oranje), binnenmantel (rood), overgangszone (lichtgroen), bovenmantel (donkergroen), korst (blauw).

De enige planeet waarvan we zeker weten dat er leven voorkomt is onze planeet aarde. Het leven en de aardse condities zijn op elkaar afgestemd. De aarde bevindt zich op de juiste afstand van de zon. Een ozonlaag beschermt ons tegen de ultraviolette straling van de zon. De laatste 100 jaar is de concentratie CO_2 sterk gestegen. Het hierdoor versterkte broeikaseffect veroorzaakt een mondiale opwarming met als gevolg veranderingen in het klimaat. Het aardmagnetische veld beschermt ons tegen de door de zon uitgestoten zonnewind[1)]. De kern van de aarde bestaat uit een vaste binnenkern van ijzer en daaromheen een vloeibare buitenkern van ijzer. In deze vloeibare kern treden elektrische stromen op die het magneetveld opwekken.

[1)] De zonnewind bestaat uit geladen deeltjes die met grote snelheid door de zon worden uitgestoten.

Figuur 13: Mars

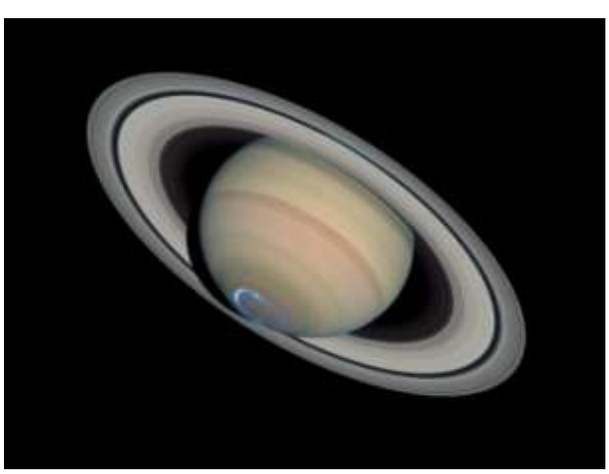


Massa	6.4169×10^{23} kg
Gemiddelde straal	3.389,5 km
Dichtheid	3.933,5 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	24 uur 37 min 22.663 sec
Siderische omloopstijd	686,98 aardse dagen
Gemiddelde afstand tot zon	$2,2794 \times 10^{11}$ m = 1,523 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Atmosfeer	95,32 % CO_2, 2,7 % stikstof 1,6 % argon
Druk aan oppervlakte	0,003 tot 0,014 bar
Oppervlaktetemperatuur	140 tot 290 K
Magnetische veldsterkte	$\pm 1,5 \times 10^{-6}$ T
Magnetische dipool moment	minder dan 10^{-4} van dat van de aarde

Figuur 14: Jupiter

Massa	$1,8981 \times 10^{27}$ kg
Gemiddelde straal	69.911 km
Dichtheid	1.326 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	9 uur 55 min 29,7 sec
Siderische omloopstijd	11,8626 aardse jaren
Gemiddelde afstand tot de zon	$7,7833 \times 10^{11}$ m = 5,203 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Atmosfeer	86,4 % moleculair waterstof, 13,6 % helium atomen
Temperatuur bij 1 bar	165 K
Kerntemperatuur	17.000 K
Magnetische veldsterkte (equator)	$4,28 \times 10^{-9}$ T
Magnetische dipool moment	20.000 x dat van aarde

Figuur 15: Saturnus



Massa	$5,683\ 19 \times 10^{26}$ kg
Gemiddelde straal	58.232 km
Dichtheid	687,1 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	10 uur 39 min 22,3 sec
Siderische omloopstijd	29,475 aardse jaren
Gemiddelde afstand tot de zon	$1,4294 \times 10^{12}$ m = 9,539 AE
Leeftijd	$4,6 \times 10^9$ jaar
Atmosfeer	97 % moleculair waterstof, 3 % helium
Temperatuur bij 1 bar	134 K
Kerntemperatuur	13.000 K
Magnetische veldsterkte (equator)	$0,22 \times 10^{-9}$ T
Magnetische dipool moment	600 x dat van aarde

Mars

Figuur 16: De Marsrover Curiosity onderzoekt de bodem en speurt naar aanwijzingen van vroeger leven.

De opvallend rode kleur van de planeet wordt veroorzaakt door bepaalde ijzeroxiden. De zuurstof die hiervoor nodig is hoeft niet noodzakelijkerwijs uit een atmosfeer te komen maar kan ook onttrokken zijn uit water.
Mars kent seizoen afhankelijke poolkappen. Deze bestaan uit bevroren koolzuurgas. Onder deze laag koolzuursneeuw of droog ijs bevindt zich bevroren water. Als alle waterijs van de Zuidpool zou smelten, zou de planeet met een 11 meter diepe laag water bedekt zijn. Drie tot vier miljard jaar geleden moet er stromend water op Mars zijn geweest. Hiervoor zijn veel aanwijzingen gevonden in de vorm van door water uitgesleten beddingen. De condities op Mars zijn niet gunstig voor leven. Het Marsonderzoek richt zich ondermeer op het vinden van vroeger leven.

Jupiter

Figuur 17: Jupiter's Rode Vlek op een opname van Voyager 1.

De planeet bestaat uit onzichtbaar waterstof- en heliumgas. Zichtbaar wordt de planeet door de bevroren ammoniawolken (NH3 aq) die zich in de bovenste lagen van de atmosfeer bevinden. De kleuren ontstaan door chemische reacties onder de invloed van UV-straling waardoor kleine smogdeeltjes ontstaan. De atmosfeer wordt gekenmerkt door lichte zones, dit zijn hogedrukgebieden ontstaan door convectie en donkere gordels, lage drukgebieden met wolken die met de winden de draairichting van de planeet volgen of er tegenin gaan. De Rode Vlek is de grootste van de vele stormgebieden. Naar het midden van Jupiter neemt de druk toe tot 70 Mbar en bevindt zich vermoedelijk een kern van gesmolten ijs en steen. De temperatuur is hier gestegen tot 17.000 K. Het grootste deel van de planeet bestaat uit vloeibaar metallisch waterstof waarin elektrische stromen het sterke magneetveld kunnen genereren.

Saturnus

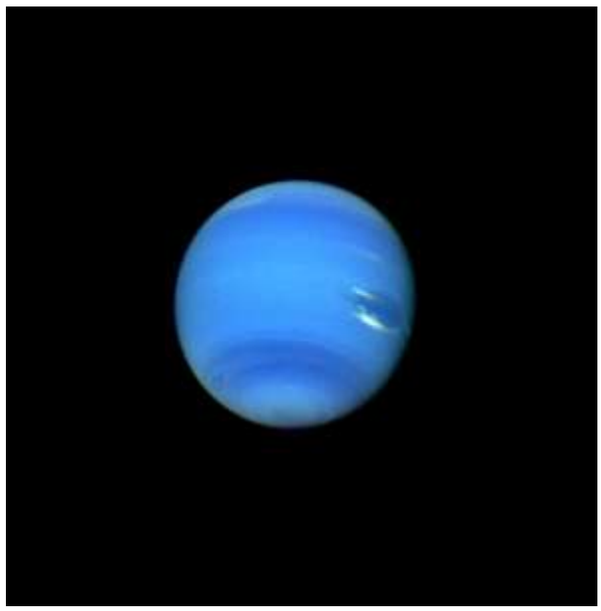
Figuur 18: Saturnus vele ringen.

Figuur 19: Het ringenstelsel onder verschillende hoeken.

De opvallende ringen van Saturnus zijn vermoedelijk ontstaan doordat sterke getijdenkrachten een maan in stukken hebben gescheurd. Er zijn veel ringen die alle een eigen omloopsnelheid kennen (fig. 16). Door de grote afstand tot de zon ontvangt Saturnus maar 1% van het licht dat wij op aarde ontvangen.
Ook Saturnus bestaat hoofdzakelijk uit vloeibaar moleculair en metallisch waterstof. De druk loopt naar het centrum op tot 18 Mbar. Zichtbaar is de planeet door de wolken van ammonia in de bovenlaag van de atmosfeer waar zich smogdeeltjes gevormd hebben die de botergele kleur veroorzaken. Er waaien winden die tien maal de kracht van een aardse orkaan hebben.
In fig. 17 zijn beelden van Saturnus te zien die in een periode van vier jaar zijn gemaakt met de Hubble Telescope. Soms zien we vanaf de aarde de ringen van opzij. In de zeventiende eeuw werd de vraag wat er met Saturnus aan de hand was door Huygens opgelost.

Figuur 20: Uranus

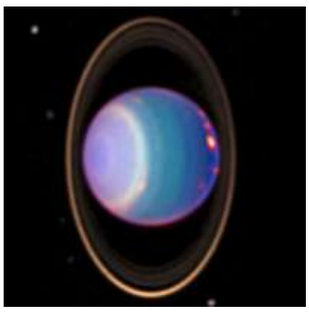
Massa	$8{,}68 \times 10^{25}$ kg
Gemiddelde straal	25.266 km
Dichtheid	1.270 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	17 h 14 min 24 s
Siderische omloopstijd	84,323 aardse jaren
Gemiddelde afstand tot de zon	$2{,}869 \times 10^9$ m = 19,19 AE
Leeftijd	$4{,}6 \times 10^9$ jaar
Atmosfeer	83 ± 3 % waterstof, 15 ± 3 % helium, 2,3 % methaan
Temperatuur bij 1 bar	76 K
Kerntemperatuur	5.000 K
Magnetische veldsterkte (equator)	$0{,}23 \times 10^{-4}$ T
Magnetische dipool moment	50 x dat van aarde



Figuur 21: Neptunus

Massa	$1{,}0236 \times 10^{26}$ kg
Gemiddelde straal	24.552 km
Dichtheid	1.638 kg/m^3
Siderische omwentelingstijd	16 h 6 min 36 s
Siderische omloopstijd	164,79 aardse jaren
Gemiddelde afstand tot de zon	$4{,}503 \times 10^{12}$ m = 30,10 AE
Leeftijd	$4{,}6 \times 10^9$ jaar
Atmosfeer	80 % waterstof, 18,5 % helium, 1,5 % methaan
Temperatuur bij 1 bar	73 K
Kerntemperatuur	5.000 K
Magnetische veldsterkte (equator)	$0{,}14 \times 10^{-4}$ T
Magnetische dipool moment	25 x dat van aarde

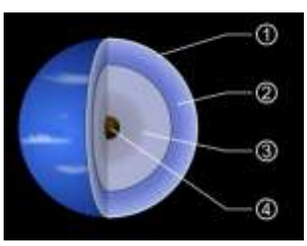
Uranus



Figuur 22: rotatie-as in het baanvlak, manen en een ringenstelsel om de planeet.

De planeet Uranus werd in 1781 door William Herschel als een niet stervormig object ontdekt. In de jaren hierna werd duidelijk dat het hier een planeet betrof. De rotatie-as ligt vrijwel in het eclipticavlak. Dit werd afgeleid uit de banen van de manen die alle in hetzelfde vlak loodrecht op de ecliptica liggen (zie fig. 19). De oorzaak van deze bijzondere helling moet gezocht worden in een botsing met een groot hemellichaam toen de planeet nog gevormd werd. Een pool van de planeet zal daarom 42 jaar zonlicht ontvangen en daarna 42 jaar in het donker liggen. Het methaan in de atmosfeer bevriest bij de lage temperatuur en vormt een wolkendek waarin ook door inwerking van ultraviolet licht mistdeeltjes kunnen ontstaan. De blauwgroene en turquoise kleuren worden door dit methaan veroorzaakt. In tegenstelling tot Jupiter en Saturnus bevindt zich in de planeet geen vloeibaar metallisch waterstof, maar heeft de planeet een diepe atmosfeer van moleculair waterstofgas. In het binnenste van de planeet bevinden zich door de hogere temperatuur in vloeibare vorm water, methaan en ammonia. De kern bestaat uit gesmolten rots.

Neptunus



Figuur 23: De interne opbouw van Neptunus.
1. Buitenste wolkenlaag.
2. Atmosfeer met waterstof methaan en helium.
3. Mantel van water-, methaan- en ammoniaijs.
4. Kern van rots

Het bestaan van Neptunus kon worden afgeleid uit de afwijkingen die in de baan van Uranus werden waargenomen. Hiermee kon Urbain Le Verrier de positie van een nieuwe planeet berekenen. Deze werd hierna in 1846 waargenomen door Johann Galle binnen een graad van de voorspelde positie.
De blauwe kleur van de planeet wordt veroorzaakt door methaan in de atmosfeer. Neptunus straalt 2,7 keer meer energie uit dan van de zon wordt ontvangen. De atmosfeer is bijzonder onrustig. Er heersen winden met een snelheid van 300 meter per seconde. Het ontvangen zonlicht kan hier niet verantwoordelijk voor zijn. De planeet ontvangt maar 1/900 van de straling die de aarde van de zon ontvangt. Een warmtebron binnenin de planeet moet deze winden veroorzaken, maar de aard van deze bron is niet bekend.

1.1.3 Manen

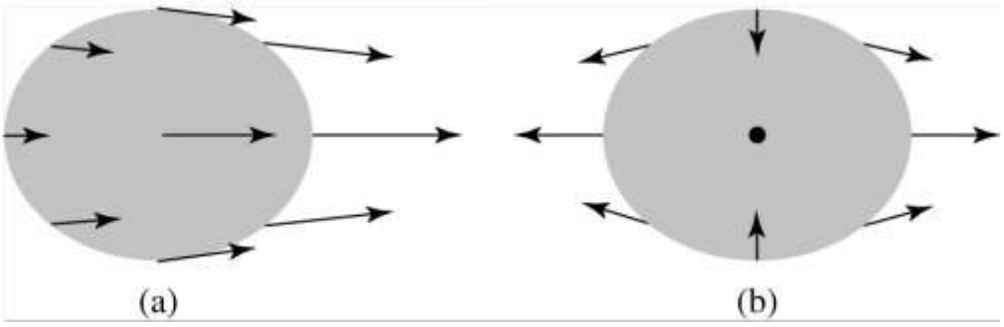
Rondom planeten en dwergplaneten kunnen andere hemellichamen draaien, die we manen noemen. Onze eigen maan is daar een voorbeeld van (fig. 23). Manen komen voor in zeer uiteenlopende afmetingen en vormen. Zo is de Jupiter-maan Ganymedes 5.268 kilometer in diameter en bolvormig. De manen van Mars Phobos en Deimos daarentegen zijn respectievelijk 22 en 13 kilometer in diameter en onregelmatig van vorm.

Planeet	**Aantal manen**
Venus	0
Aarde	1
Mars	2
Jupiter	67
Saturnus	62
Uranus	27
Neptunus	14

Tabel 1: aantal manen van de planeten.

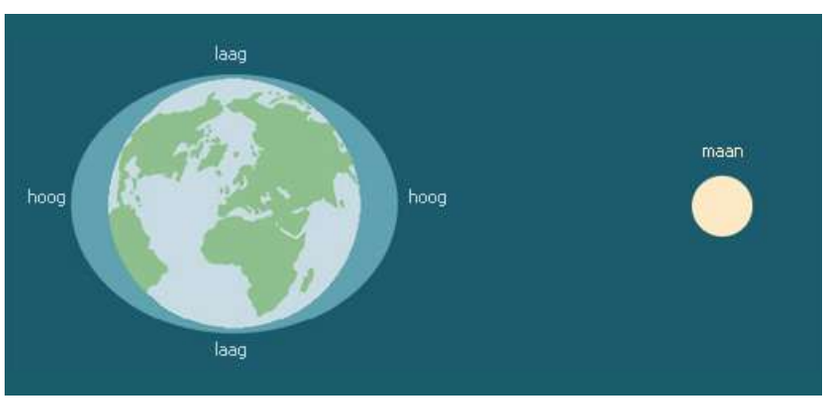
1.1.3.1 Getijdenwerking

In de klassieke mechanica werkt men met puntmassa's. Een massa *m* wordt toegekend aan een bolvormig lichaam met te verwaarlozen straal. De positiebepaling van het lichaam in berekeningen wordt zo mogelijk. In werkelijkheid kunnen geen puntmassa's bestaan. Ze zouden mini zwarte gaten zijn en verdwijnen door de Hawking-straling. Wanneer we hemelobjecten beschouwen en hen eindige afmetingen geven krijgen we te maken met getijdenkrachten (Eng.: tidal forces). Als we een maan niet beschouwen als een puntmassa maar als een object met zekere afmetingen zal er een verschil optreden tussen de aantrekkingskracht die op een maan wordt uitgeoefend aan de zijde die dichter bij een planeet ligt en aan de zijde die verder van een planeet ligt. Deze verschilkracht noemen we de getijdenkracht. Volgens de derde wet van Newton geldt dezelfde situatie ook voor de zijde van de planeet die dichterbij de maan is en de zijde van de planeet die verder van de maan ligt. Door de getijdenkrachten krijgen maan en planeet een niet-bolvormige vorm. Als de getijdenkracht groot is kan een maan uit elkaar gerukt worden. Eb en vloed danken er hun bestaan aan. Maar ook het vaste oppervlak van de aarde ondergaat een vervorming al is deze maar 10 cm in hoogte. Bij de Maan wordt het oppervlak veel meer vervormd, deze vervorming bedraagt wel 20 m.
In fig. 21a zien we dat de aantrekkingskracht op een kleine massa van de planeet afhangt van de afstand tot de maan. Om de verschillen goed te kunnen zien trekken we de aantrekkingskracht die op het massamiddelpunt



Figuur 24: Getijdenkrachten zijn verschilkrachten.

van de planeet wordt uitgeoefend af van alle werkende aantrekkingskrachten op de verschillende delen van de planeet (fig. 21b). In het massamiddelpunt verdwijnt de kracht en vanuit dit punt zien we hoe aan de linker en rechterkant de verschilkracht naar verschillende richtingen werkt. Boven en onder werken de verschilkrachten naar het middelpunt van de aarde toe. Het resultaat is dat er twee vloedbergen ontstaan (Zie fig. 22). De cohesiekrachten (van elektromagnetische aard) in de oceanen zijn in evenwicht met de gravitationele getijdenkrachten.

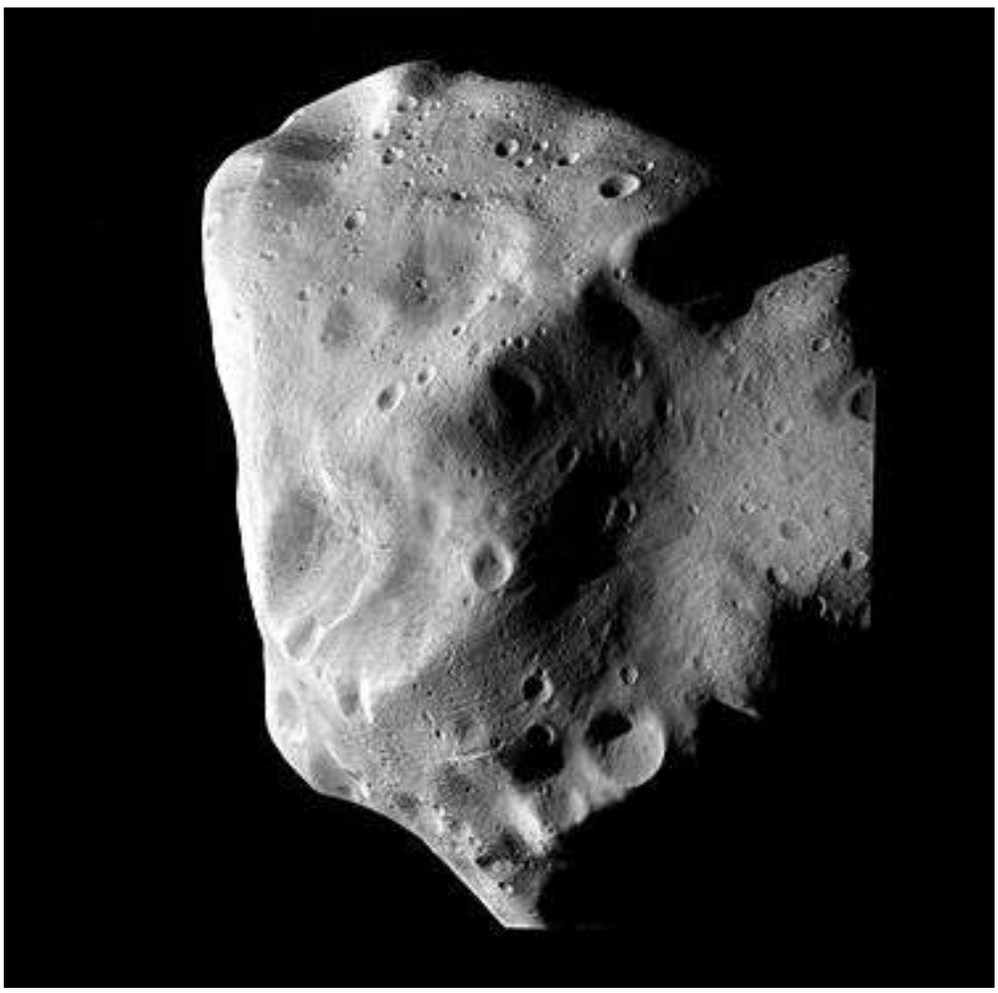


Figuur 25: vloedbergen op aarde.

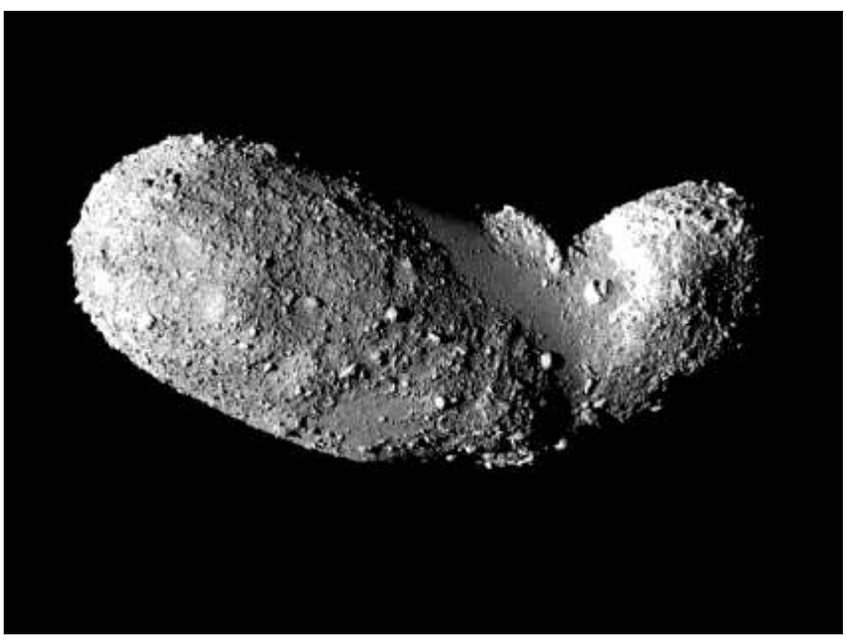
Natuurlijk heeft ook de zon een getijdenwerking op de aarde, zij het dat die minder groot is. Wanneer de werking van de maan en de zon elkaar versterken (bij volle of nieuwe maan) spreekt men van springvloed. Als de maan in het eerste of laatste kwartier staat verzwakken de krachten elkaar en spreekt men van doodtij. De eb- en vloedwerking is nog van andere factoren afhankelijk. Hierdoor ontstaan kleinere effecten. Het totaal noemen we de samengestelde getijdenwerking.

Figuur 26: de maan van de aarde.

1.1.4 Asteroïden



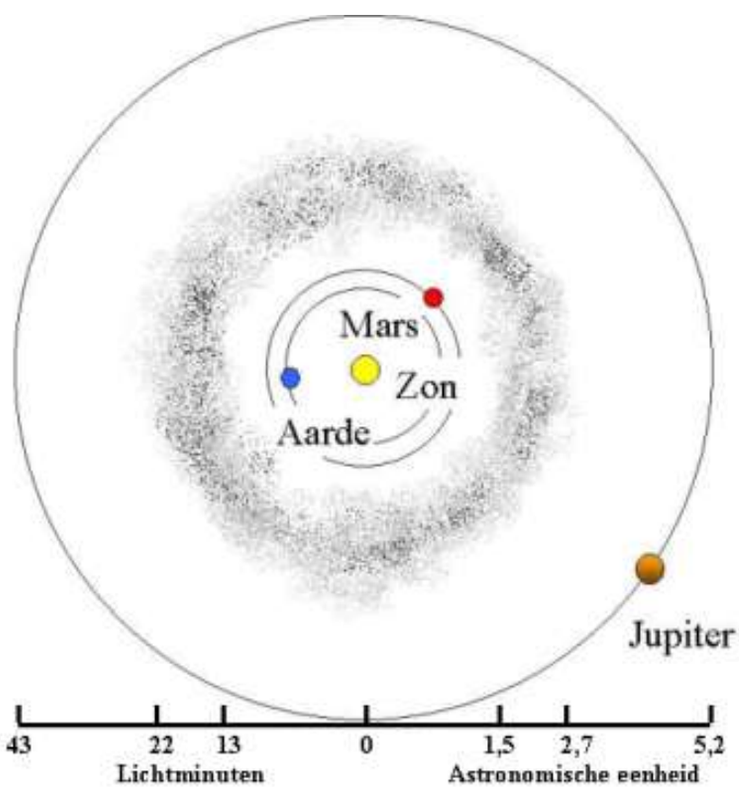
Figuur 27: De asteroïde Lutetia, zoals waargenomen in juli 2010 door de ruimtesonde Rosetta. De diameter is ongeveer 100 km, niet groot genoeg om bolvormig te zijn.



Figuur 28: De asteroïde Itokawa is maar 500 m lang. De baan kruist die van de aarde.

Tussen de planeten in het zonnestelsel komen verder nog vele kleinere hemellichamen voor, die zelfstandig rondom de zon draaien, maar te klein zijn om onder invloed van de eigen zwaartekracht een bolvorm aan te nemen, en daarmee een planeet of dwergplaneet te zijn. Deze kleinere hemellichamen zijn *asteroïden* en *kometen*, die typisch onregelmatig van vorm zijn (aardappelvormig) en afmetingen van enkele kilometers tot maximaal honderden kilometers hebben. Het zijn overblijfselen van het ontstaan van ons zonnestelsel, brokken materie die nooit ingevangen werden door de planeten toen deze zich vormden (hier komen we later op terug).
De meeste asteroïden bevinden zich tussen de baan van Mars en Jupiter in de zogenaamde *asteroïdengordel*. De asteroïdengordel strekt zich uit van ongeveer 2 tot 5 AE. De totale massa van alle asteroïden in deze gordel is ongeveer 4% van de massa van de maan.

Fig. 29 lijkt te suggereren dat de asteroïden zich zo dicht bij elkaar bevinden dat het doorkruisen van de asteroïdengordel met een ruimtesonde een riskante onderneming is en dat onderlinge botsingen tussen de asteroïden ook veelvuldig voorkomen. Het volume van de ruimte die de asteroïden bezetten is echter zo groot dat het tientallen miljoenen jaren duurt voor een onderlinge botsing optreedt.



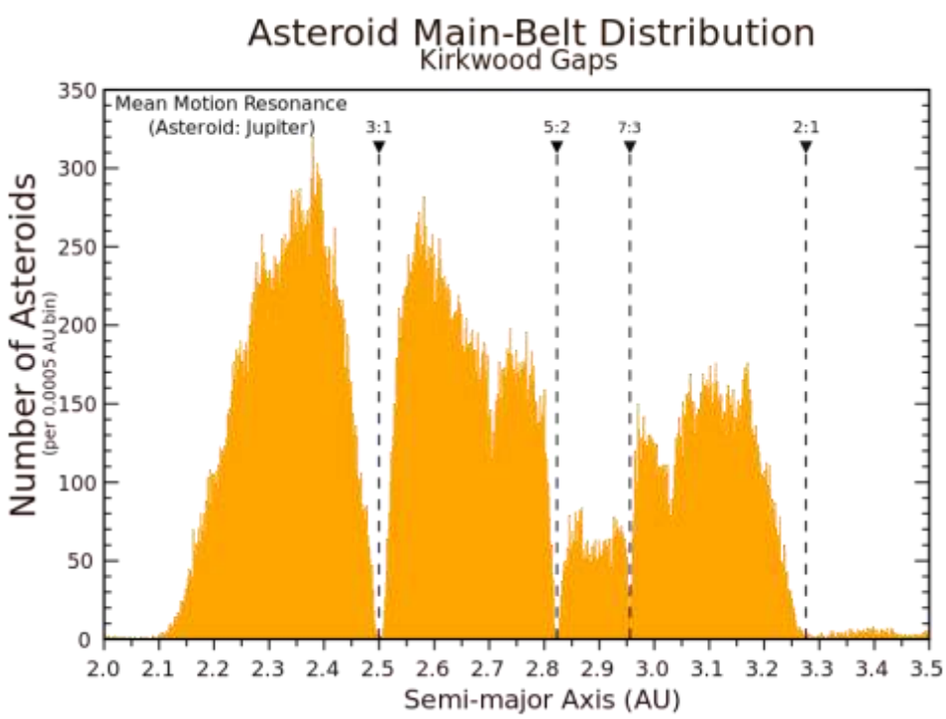
Figuur 29: de asteroïdengordel tussen Mars en Jupiter.

De grootste asteroïde in de asteroïdengordel heet Ceres en is 950 kilometer in diameter. Ceres heeft daarbij voldoende massa om zichzelf bolvormig te maken. Gecombineerd met het feit dat Ceres rond de zon draait, maar haar baan wel deelt met andere hemellichamen, d.w.z. de andere asteroïden in de asteroïdengordel, is Ceres, net als Pluto, ook als dwergplaneet geclassificeerd.

Figuur 30: Ceres, de grootste van de asteroïden is bolvormig.

Asteroïden komen ook elders voor. Twee bijzondere asteroïdengroepen, de zogenaamde Trojanen en Grieken houden zich bijvoorbeeld op in de baan van Jupiter. Elk van deze twee groepen maakt in de baan van Jupiter een zodanige hoek met de zon en Jupiter dat deze twee groepen niet op den duur door Jupiter opgeveegd of weggeslingerd kunnen worden. Deze asteroïden houden zich op nabij de zogenaamde Lagrangepunten. In deze punten zijn de aantrekkingskracht van Jupiter en de zon gelijk aan elkaar.

Bij iedere afstand tot de zon (uitgedrukt in AE) behoort een eigen omlooptijd. Wanneer de afstand zodanig is dat de omlooptijd van Jupiter bijvoorbeeld driemaal zo groot is als die van de asteroïde (3:1), dan zal de asteroïde regelmatig onder de invloed van Jupiter's gravitatieveld komen. Dit is te vergelijken met het geven van stootjes aan een schommel op het juiste moment. Dit kan men beschouwen als een resonantieverschijnsel. De asteroïde zal hierdoor uit zijn baan verdreven worden en in een baan terecht komen die de aardbaan kan kruisen. Op sommige afstanden vinden we dus weinig asteroïden. Deze gaten noemt men in het Engels *Kirkwood Gaps*, genoemd naar de ontdekker.



Figuur 31: Verdeling van de asteroïden - Kirkwood Gaps

Deze asteroïden bevinden zich dus her en der tussen de banen van de planeten in het zonnestelsel en maken niet per se deel uit van een grotere groep. Sommige van deze asteroïden botsen af en toe met één van de planeten, waaronder de aarde, waarbij een botsing grote schade aan kan richten en een krater achter kan laten. Asteroïden die regelmatig in de buurt van de aarde komen worden tegenwoordig om die reden nauwlettend in de gaten gehouden.

De kinetische energie die bij een botsing vrijkomt kan berekend worden met $K.E.=½\ M\ V^2$
Een bolvormige asteroïde met een straal van 5 km en een massadichtheid $\rho=3.000\ kg/m^3$ heeft een massa van $M=\rho \times 4/3\ \pi\ R^3 = 1,6 \times 10^{15}$ kg. De snelheid V is ongeveer 30 km/s waardoor we krijgen: $K.E.=7,2 \times 10^{23}$ joules.
Deze energie is equivalent aan de energie die vrijkomt bij de ontploffing van 100.000 bommen van elk 100 megaton TNT.

De meeste deskundigen zijn het er nu wel over eens dat de dinosaurus is uitgestorven door de gevolgen van een asteroïdeninslag. Gedurende een tijdvak van 160 miljoen jaar was de dinosaurus de dominante levensvorm op aarde. Tot 65 miljoen jaar geleden een asteroïde, groter dan 10 km, insloeg op het schiereiland Yucatán in Mexico en een krater maakte met een diameter van 170 km. Door het vrijkomen van de grote hoeveelheid kinetische energie verdampte de asteroïde geheel bij deze inslag en een grote vuurbal steeg op in de stratosfeer en droeg met zich mee een grote hoeveelheid verpulverd gesteente. Er vormden zich grote wolken van stof en as die door de luchtstromingen om de gehele aarde heen cirkelden. Hierdoor werden licht- en warmtestraling van de zon geblokkeerd. De aarde maakte hierdoor een koude periode van maanden door, tot de stof weer neersloeg op de aardbodem. Planten groeiden niet meer in deze lange wintertijd en hierdoor stierven veel planteneters uit. Ook vleesetende dieren die jacht maakten op planteneters konden geen prooi meer bemachtigen en stierven uit. Er ontstonden door de gloeiende rotsbrokken, die in de wijde omgeving neerkwamen, bosbranden. Er viel een zure regen die het oceaanwater vergiftigde waardoor schelpdieren stierven. Een hele voedselketen werd verbroken. Ongeveer de helft van alle plant- en diersoorten verdwenen door deze inslag. Hierdoor kregen andere dieren weer kansen in de altijd doorgaande evolutie. Dat waren vooral de kleinere zoogdieren die ervan profiteerden. Onze verre voorouders zijn waarschijnlijk door deze ontwikkeling ontstaan.

1.1.5 Kometen

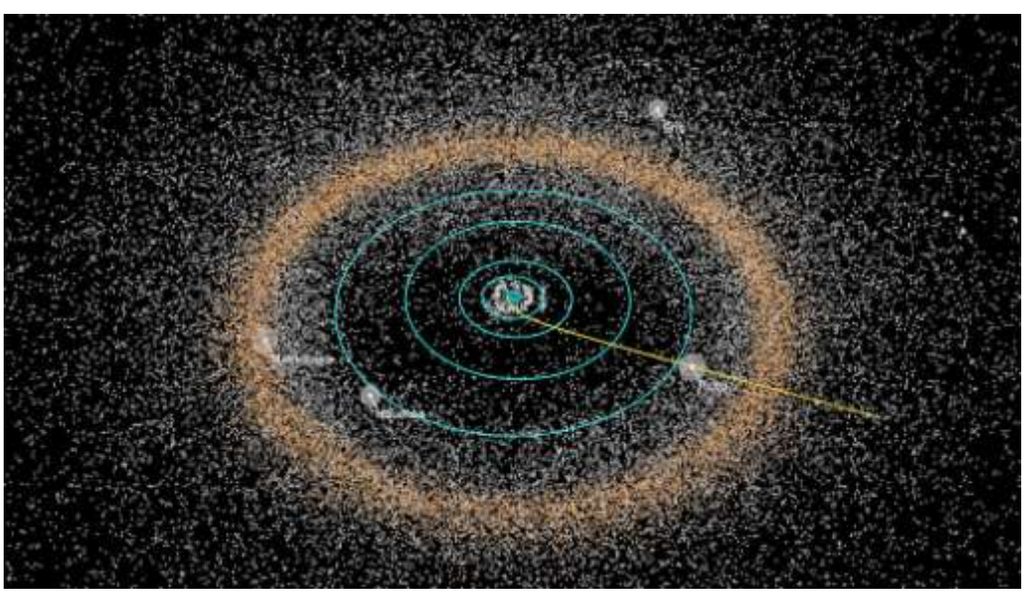
Kometen beginnen hun leven in de buitenste regionen van het zonnestelsel. Net zoals asteroïden zijn het overblijfselen van het ontstaan van ons zonnestelsel. Een komeet is in wezen een onregelmatig gevormde, vuile, *stoffige*, sneeuwbal.

Figuur 32: De komeet 67P/Churyumov-Gerasimenko, op 19 september 2014 opgenomen door ruimtesonde Rosetta. De komeet heeft een diameter van 4 km. Er is meer vuil dan ijs zichtbaar.

Onder het begrip *stof* worden hierbij microscopisch kleine zand- en roetdeeltjes (in de orde van micrometers groot) verstaan. Kometen draaien om de zon, meestal in sterk uitgerekte, niet cirkelvormige, banen. Zodra een komeet dicht in de buurt van de zon komt, begint het gas en stof van het oppervlakte te verdampen en vormt een staart. Deze staart bestaat uit twee delen, een gas- en een stofstaart. De gasstaart ontstaat door het vrijkomende gas, dat meedrijft met de zogenaamde *zonnewind*, een continue stroom geladen deeltjes die door de zon de ruimte in wordt geblazen. Omdat de gasstaart met de zonnewind meebeweegt, en de zonnewind van de zon af beweegt, wijst de gasstaart altijd van de zon af, ongeacht of de komeet zelf naar de zon toe beweegt of er vanaf beweegt. De stofstaart ontstaat door het vrijkomende stof. Het stof wordt minder makkelijk afgevoerd door de zonnewind en blijft vooral in de baan van de komeet hangen. De stofstaart is dus te zien in de richting tegenovergesteld aan de beweegrichting van de komeet.

Figuur 33: Komeet Hale-Bopp (1997) met de blauwe gasstaart en de witte stofstaart.

Kometen vallen in twee verschillende groepen uiteen, de *kortperiodieke* en de *langperiodieke* kometen. De omlooptijd van de kortperiodieke bedraagt 200 jaar tot duizenden jaren. Deze kometen bewegen daarbij hoofdzakelijk in het vlak van het zonnestelsel en zijn afkomstig uit de *Kuipergordel*, een gordel van ijsachtige hemellichamen buiten de baan van Neptunus die zich uitstrekt tot zo'n 50 AE. Pluto en andere dwergplaneten maken onderdeel uit van deze Kuipergordel.



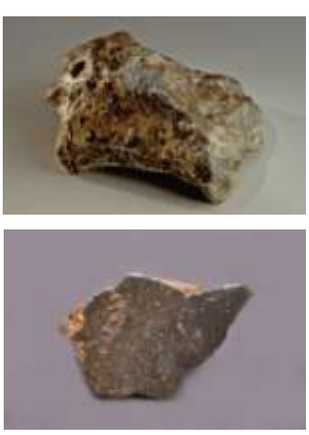
Figuur 34: De Kuipergordel met daarin Pluto en andere dwergplaneten.

De langperiodieke kometen beperken zich niet tot het vlak van het zonnestelsel, maar kunnen uit alle mogelijk windrichtingen komen. Ze zijn waarschijnlijk afkomstig uit de *Oortwolk*, een hypothetische wolk van ijsachtige hemellichamen die zich uitstrekt van zo'n 50 tot 200 duizend AE, ofwel grofweg 1 tot 3 lichtjaar! Kometen in deze wolk zijn te klein en te donker om op deze grote afstand direct waargenomen te kunnen worden vanaf aarde. De Oortwolk is dus nog niet direct waargenomen, maar kan wel verklaren waarom langperiodieke kometen hun lange omlooptijd hebben en uit alle windrichtingen lijken te komen. De ijsachtige hemellichamen in de Oortwolk bevonden zich vroeger, vlak na het ontstaan van het zonnestelsel, waarschijnlijk in het vlak van het zonnestelsel, maar zijn er onder invloed van de zwaartekracht van de gasplaneten uiteindelijk uitgeslingerd.

1.1.6 Gas en stof

Tenslotte bevinden zich tussen de planeten nog gas, stof (de eerder genoemde microscopisch kleine zand- en roetdeeltjes) en ander gruis. Het gas kan bijvoorbeeld afkomstig zijn van de zonnewind en verdampende kometen. Het stof en gruis kunnen afkomstig zijn van bijvoorbeeld kometen en asteroïden. Een deel van dit stof en gruis kan na verloop van tijd op planeten terecht komen. Zo beweegt de aarde op gezette tijden door stofwolken die bijvoorbeeld zijn achtergelaten door kometen. Stof- en gruisdeeltjes uit de wolk kunnen hierbij naar de aarde toevallen. Wanneer deze deeltjes met de aardatmosfeer in aanraking komen ontstaat er wrijving en beginnen deze deeltjes te verbranden. Er ontstaat dan een lichtspoor langs de nachthemel die in de volksmond een *vallende ster* of *meteoor* wordt genoemd.

In sommige gevallen blijft een deel van het materiaal over en komt het op aarde terecht. Het overblijfsel noemen we een *meteoriet*. Zolang het deeltje zich nog in de ruimte bevindt, en nog niet in contact is gekomen met de aardatmosfeer, wordt het deeltje een *meteoride* genoemd. De meeste meteorieten die gevonden worden bestaan uit ijzer en nikkel. Dit zijn de zogenaamde *ijzermeteorieten*. Naast ijzermeteorieten worden er ook *steenmeteorieten* en *steen-ijzermeteorieten* gevonden. Ondanks dat ijzermeteorieten het meest worden gevonden op aarde, betekent dat niet dat de meeste meteoriden in de ruimte ook vooral uit ijzer en nikkel bestaan. Dit beeld wordt namelijk vertekend omdat steenmeteoriden en steenijzer-meteororiden makkelijker verbranden in de aardatmosfeer dan ijzermeteoriden en er dus relatief minder het aardoppervlak bereiken.



Figuur 35: IJzermeteoriet (boven) en steenmeteoriet (onder).

Figuur 36: De Hoba meteoriet in Namibië is de grootste bekende intacte meteoriet. Hij is 2,7 m lang en heeft een massa van 60 ton. De meteoriet is samengesteld uit 82,4% ijzer, 16,4% nikkel, en 0,76% kobalt.

1.2 Planeeteigenschappen

Uit de *grootte* (d.w.z. straal, diameter of volume) en de *massa* van een planeet kunnen we de *gemiddelde dichtheid* van de planeet afleiden. De gemiddelde dichtheid geeft aan hoeveel gram materie er gemiddeld per kubieke centimeter aanwezig is in de planeet. Hiermee leren we iets over de chemische samenstelling van de planeet. Zo hebben de aardse planeten typisch een gemiddelde dichtheid van 4 à 5 gram per kubieke centimeter, wat erop duidt dat deze planeten vooral uit rotsachtige materialen bestaan. De gasreuzen daarentegen hebben een gemiddelde dichtheid van 1 à 2 gram per kubieke centimeter, wat erop duidt dat ze vooral uit gassen en andere *vluchtige materialen* bestaan (vluchtige materialen zijn materialen die bij lage temperatuur verdampen). Saturnus heeft een dusdanig lage gemiddelde dichtheid (0,69 gram per kubieke centimeter) dat Saturnus in water kan blijven drijven. Merk op dat de lagere gemiddelde dichtheid van de gasreuzen t.o.v. de aardse planeten niet in tegenspraak is met het feit dat de massa van de gasreuzen veel groter is dan die van de aardse planeten. In het geval van de gasreuzen wordt hun massa namelijk over een veel groter volume verspreid dan in het geval van de aardse planeten, waardoor de gemiddelde dichtheid van de gasreuzen toch onder die van de aardse planeten uitkomt.

Bepaling van de massa van een planeet.

Als voorbeeld van een planeet nemen we Jupiter. Deze heeft vier duidelijk waarneembare manen. Voor een van de manen bepalen we de omlooptijd *T*. Daartoe leggen we waarnemingen vast van de positie van de maan voor een voldoende groot aantal tijdstippen. We kunnen aan de hand van deze waarnemingen de hoek tussen planeet en maan bepalen als de maan op de grootste afstand staat van de planeet.
We kennen de afstand tot Jupiter en daarmee kunnen we de afstand *r* van de maan tot het centrum van de planeet berekenen.
We gaan uit van de zwaartekrachtswet

$$F_g = GMm/r^2 \qquad (1)$$

Als we uitgaan van een cirkelvormige beweging geldt voor de centripetale kracht

$$F_c = mv^2/r \qquad (2)$$

Gelijkstelling van (1) en (2) levert

$$M = v^2 r/G$$

Omdat $v = 2\pi r/T$ kunnen we schrijven

$$M = 4\pi^2 r^3/GT^2 \qquad (3)$$

Naast de grootte (in zowel massa als afmeting) en afstanden van planeten in het zonnestelsel zijn er andere eigenschappen van planeten waarnaar gekeken kan worden. Denk hierbij aan de *omlooptijd* (die bepaalt hoelang een jaar op de planeet duurt) en de *temperatuur* die beide direct afhangen van de gemiddelde afstand tot de zon. Hoe verder een planeet van de zon afstaat, hoe meer tijd de planeet er over doet om eenmaal rond de zon te gaan en hoe kouder de planeet zal zijn.
De gemiddelde temperatuur van een planeet hangt ook af van hoe goed een planeet zonlicht kan reflecteren. Dit wordt gemeten door het zogenaamde *albedo*, het totaal reflecterend vermogen van de planeet. De albedo is een getal met een waarde tussen 0 en 1. Een albedo van 1 betekent dat de planeet al het zonlicht dat erop terechtkomt, weerkaatst. Een albedo van 0 betekent dat de planeet al het zonlicht dat erop terechtkomt, absorbeert. Hoe hoger (lager) het albedo, hoe meer (minder) een planeet zonlicht kan reflecteren, en

dus hoe minder (meer) zonlicht door het oppervlakte geabsorbeerd kan worden. Dit verlaagt (verhoogt) de oppervlaktetemperatuur. Het albedo hangt samen met de *oppervlaktesamenstelling* van de planeet. Zo zal een planeet met veel ijs aan het oppervlak efficiënt zonlicht kunnen reflecteren (hoog albedo), terwijl een planeet met veel koolstofhoudende materialen aan het oppervlak dit niet zal kunnen (laag albedo). De oppervlaktesamenstelling bepaalt ook de *kleur* van de planeet.

Verder kan de aanwezigheid van een atmosfeer de temperatuur beïnvloeden door het opwekken van een *broeikaseffect*, een effect waarbij gassen in de atmosfeer van een planeet de warmte die een de planeet uitstraalt langer vast kan houden dan normaal. Hoe sterker de gassen die warmte absorberen, hoe sterker het broeikaseffect en hoe hoger de gemiddelde temperatuur. De planeet Venus is een goed voorbeeld van een planeet met een sterk broeikaseffect. Door de aanwezigheid van koolstof- en zwaveldioxide gassen in de dichte atmosfeer van Venus is de gemiddelde oppervlaktetemperatuur 462 °C, genoeg om lood te doen smelten. Venus is veel warmer dan het er zou zijn geweest zonder atmosfeer. Ter vergelijking, de planeet Mercurius staat ongeveer twee keer dichter bij de zon en de oppervlaktetemperatuur van Mercurius is 426 °C aan de dagzijde. Venus heeft overigens ook een hoog zonlicht reflecterend vermogen (albedo 0,77). Dit is het gevolg van dezelfde dichte atmosfeer die Venus ook een sterk broeikaseffect geeft.

Behalve bovengenoemde zaken kan er ook nog gekeken worden naar de rotatie van de planeet. Hier zijn de *rotatieperiode* en de *stand van de rotatie-as* van belang. De rotatieperiode van de planeet bepaalt hoelang een dag op de planeet duurt. In het geval van een snelle rotatie, zoals bij Jupiter en Saturnus het geval is, kan de snelle rotatie, en het feit dat deze planeten hoofdzakelijk uit gas bestaan, ervoor zorgen dat deze planeten enigszins afgeplat worden (niet helemaal bolvormig meer zijn). Venus daarentegen draait in 243 dagen (!) om haar as. Dit is langer dan een jaar op Venus duurt (225 dagen).

De stand van de rotatie-as bepaalt onder andere de sterkte van de seizoenen op de planeet. De stand van de rotatie-as wordt gemeten door te kijken naar de hoek tussen de rotatie-as van de planeet en de lijn loodrecht op het baanvlak waar de planeet zich in voortbeweegt (de loodlijn). Staat de rotatie-as loodrecht op het baanvlak van de planeet, dan zijn er geen seizoenen (geen lente, zomer, herfst en winter). Staat de rotatie-as uit het lood, dan ontstaan er seizoenen, waarbij de sterkte van de seizoen groter wordt naarmate de rotatie-as meer uit het lood staan. Jupiter staat 3 graden uit het lood en kent dus geen sterke seizoenen. De aarde staat 23 graden uit het lood en heeft daarmee gematigde seizoenen. In het extreme geval van de planeet Uranus staat de rotatie-as onder een hoek van 98 graden met het baanvlak. Dit heeft tot gevolg dat de dag op Uranus gekoppeld is met het jaar op Uranus. Dit

houdt in dat op Uranus 12 uur ’s middags inhoudt dat het hoogzomer is, 6 uur ’s avonds betekent herfst, 12 uur ’s nachts betekent winter, en 6 uur ’s ochtends betekent lente. Een nog extremer geval is de planeet Venus. Hier staat de rotatie-as onder een hoek van 177 graden t.o.v. het baanvlak. Venus staat effectief gezien dus ondersteboven en heeft daarmee een rotatierichting die tegenovergesteld is aan die van de meeste andere planeten. De gebruikelijke rotatierichting wordt prograde genoemd. De rotatierichting van Venus is retrograde.

2 De vorming van ons zonnestelsel

De huidige structuur van het zonnestelsel levert aanwijzingen over hoe het zonnestelsel ontstaan is. Zo kunnen we kijken naar de *dynamica van het zonnestelsel*, dus de manier waarop alle hemellichamen in het zonnestelsel zich bewegen, en naar de *chemie van het zonnestelsel*, dus de (relatieve) verdeling van chemische elementen (type materialen) in het zonnestelsel. Hieronder gaan we verder in op de vorming van het zonnestelsel en de bewijzen die we daarvoor denken te hebben.

2.1 Leeftijd van ons zonnestelsel

De zon en het zonnestelsel vormden zich waarschijnlijk zo’n 4,6 miljard jaar geleden. Deze leeftijd wordt geschat op basis van de analyse van radioactieve chemische elementen in gesteenten afkomstig van de aarde, de maan, de planeet Mars en meteorieten.

Radiometrische datering

Isotopen

Alle materiaal op Aarde bestaat uit verbindingen van chemische elementen. Al deze elementen hebben een eigen atoomnummer, dat het aantal protonen in de atoomkern weergeeft. Een atoomkern bevat ook neutronen, en atomen van hetzelfde element kunnen met verschillende aantallen neutronen in de natuur voorkomen. Twee atomen van hetzelfde element met verschillende aantallen neutronen worden verschillende isotopen van dat element genoemd.

Radioactief verval

Verschillende isotopen van een element hebben een verschillende massa en stabiliteit. Sommige isotopen zijn instabiel en lopen de kans op een willekeurig moment uit elkaar te vallen door radioactief verval. Radioactief verval betekent meestal het afstoten van alfadeeltjes (twee protonen en twee neutronen samen) en bètadeeltjes (elektronen).

Het moment waarop een bepaalde atoomkern uiteenvalt, is volkomen willekeurig. Echter, materialen bestaan uit enorme aantallen atomen, en van de radioactieve atomen in het materiaal zal altijd een bepaald percentage over een bepaalde tijd vervallen. Dat percentage is afhankelijk van de stabiliteit van de atomen. Deze mate van stabiliteit wordt beschreven door de halveringstijd: de tijd die verloopt tot de helft van alle instabiele atomen is vervallen. Voor iedere isotoop is deze waarde een natuurkundige constante.
De meeste radioactieve isotopen vervallen in een aantal stappen (een vervalreeks) naar een stabiel element, dat de dochter of het dochterelement wordt genoemd. De isotoop zelf wordt de moeder genoemd. De halveringstijd die wordt opgegeven is meestal de halveringstijd van alle stappen samen die nodig zijn om van moeder naar dochter te komen. Om geschikt te zijn voor ouderdomsbepalingen, moet een isotoop een halveringstijd hebben van duizenden tot miljarden jaren.

Isotopen zijn een nauwkeurige klok.
In de meeste gevallen is de halveringstijd alleen afhankelijk van de eigenschappen van de desbetreffende atomen; hij wordt niet beïnvloed door temperatuur, druk, chemische omgeving, magnetische of elektrische velden, of andere externe factoren. Bovendien wordt aangenomen dat de halveringstijd door de tijd heen gelijk blijft. Daarom is de kwantitatieve verhouding tussen moeder- en dochterelement te zien als een nauwkeurige klok, die de tijd aangeeft die is verlopen vanaf het moment dat het moederelement in het materiaal werd aangebracht tot heden.
De processen die materialen vormen, zijn vaak selectief voor welke elementen/isotopen er in het materiaal terechtkomen. In het ideale geval zal het materiaal tijdens vorming alleen het moederelement opnemen en het dochterelement uitsluiten. Als het materiaal dan wordt onderzocht, zal aanwezige stof van het dochterelement alleen door radioactief verval van de moeder zijn ontstaan, dus nadat het materiaal is gevormd.
Als een materiaal dat het dochterelement uitsluit verhit raakt, zullen dochteratomen die in de loop der tijd zijn ontstaan, door diffusie uit het materiaal verdwijnen,waarbij de klok wordt teruggezet naar “nul”. De temperatuur waarbij dit gebeurt, wordt de blokkeringstemperatuur genoemd; deze verschilt per materiaal.

De ouderdomsvergelijking
Als een radioactief moederelement vervalt naar een stabiele dochter, is de ouderdomsvergelijking die radioactief verval en geologische tijd met elkaar verbindt:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(1 + \frac{D}{P}\right)$$

met

- t = ouderdom van het materiaal
- D = concentratie van het dochtermateriaal
- P = concentratie van de moederisotoop
- λ = de vervalconstante voor de moederisotoop
- ln = de natuurlijke logaritme

De vervalconstante λ is het deel van de atomen van het moederelement die vervallen per eenheid van tijd, en is omgekeerd evenredig met de halveringstijd:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

waarbij $t_{1/2}$ = halveringstijd van het moederisotoop.

Voorwaarden voor goede radiometrisch datering
Het te onderzoeken materiaal sluit niet altijd het dochterelement uit – soms kunnen zowel moeder als dochter tijdens de vorming van een materiaal worden opgenomen. In zulke gevallen moet een aanname worden gedaan voor de verhouding van moeder en dochter tijdens de vorming. De dochter is bij voorkeur geen gas (omdat dit gemakkelijk uit het materiaal zou kunnen lekken) en het moet zelf stabiel genoeg zijn zodat het in behoorlijke concentraties kan worden gemeten. Bovendien moeten zowel moeder als dochter geen stoffen vormen die gemakkelijk chemische reacties aangaan, of stoffen die in te veel andere vervalreacties geproduceerd worden of vervallen.
Ten slotte moeten de technieken die worden gebruikt bij het isoleren en analyseren van de concentraties betrouwbaar en duidelijk zijn.
Bij datering door middel van een isochron, de simpelste vorm van radiometrische datering, is het niet nodig te weten wat de verhouding tussen moeder- en dochterelement was tijdens de vorming van het materiaal.

Massaspectrometer
Radiometrische datering kan worden toegepast op minder dan een miljardste deel van een gram materiaal, door een massaspectrometer te gebruiken. Dit apparaat werd in de jaren 1940 uitgevonden en wordt sinds de jaren 1950 voor radiometrische dateringen gebruikt. In de massaspectrometer wordt door verhitting een straal geïoniseerde atomen uit het monster getrokken, welke straal door middel van een magnetisch veld wordt gesplitst naar massa en lading van de ionen. De ionen worden gemeten door sensoren die Faraday cups worden genoemd. Als de ionen inslaan in de cups, wordt een zwakke elektrische stroom waargenomen waaruit vervolgens de hoeveelheden en concentraties van verschillende elementen/isotopen kunnen worden bepaald (Bron: Wikipedia).

2.2 Dynamica van ons zonnestelsel

De dynamica van het zonnestelsel laat zien dat alle planeten in dezelfde richting om de zon draaien. Laten we voor het gemak zeggen dat deze draairichting tegen de klok in is. Dit is natuurlijk een willekeurige keuze die afhangt van de richting van waaruit we het zonnestelsel bekijken. Wanneer we het zonnestelsel namelijk vanuit de tegenovergestelde richting bekijken zal alles met de klok mee te lijken draaien. Waar het hier vooral omgaat is dat er kennelijk een voorkeursrichting is.
Met de gekozen kijkrichting zien we verder dat bijna alle planeten (Venus en Uranus zijn uitzonderingen) in dezelfde richting om hun eigen as draaien (tegen de klok in) en dat bijna alle manen in dezelfde richting om hun moederplaneet heendraaien (ook tegen de klok in).
De planeten bevinden zich verder op regelmatig verdeelde afstanden van de zon en hebben nagenoeg cirkelvormige banen. Daarbij bewegen ze zich allemaal nagenoeg in hetzelfde vlak (binnen 10 graden van het baanvlak van de aarde, de zogenaamde *ecliptica*). Kometen daarentegen, en dan vooral de langperiodieke kometen, bewegen vanuit allerlei hoeken en richtingen door het zonnestelsel.

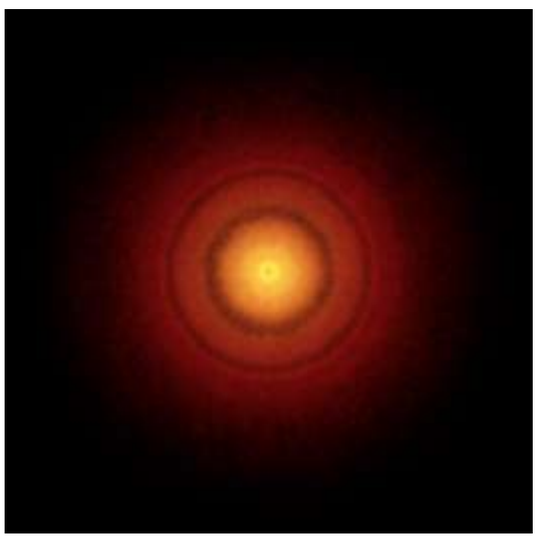
2.3 De zonnenevelhypothese

De *zonnenevelhypothese* vormt de basis voor de moderne theorie over planeetvorming en kan de dynamica van het zonnestelsel goed verklaren. De hypothese stelt dat de planeten tegelijk met de zon vormden uit een wolk van gas en stof, de zogenaamde *zonnenevel*. Uit deze nevel ontstond een afgeplatte gas- en stofschijf, met de zon in het centrum van deze schijf. Uit de schijf vormden zich de planeten.
Hoe vormde deze zonnenevel een schijf? Ten eerste begon de nevel zich samen te trekken onder invloed van de zwaartekracht. De nevel bevatte al een beetje rotatie-energie en roteerde daardoor al een beetje. Terwijl de nevel samentrok, begon deze steeds sneller te roteren (Denk aan een kunstschaatster. Wanneer zij ronddraait en haar armen intrekt, zal ze sneller rond haar as gaan draaien). De rotatiesnelheid van de nevel nam dus toe in de loop van de tijd en de steeds grotere rotatiesnelheden leidden tot steeds grotere *centrifugaalkrachten*. De centrifugaalkrachten werkten de zwaartekracht tegen en vertraagden het samentrekken van de nevel. Echter, nabij de evenaar van de nevel waren de rotatiesnelheden, en dus de centrifugaalkrachten, groter dan nabij de polen van de nevel. In het evenaarsvlak van de nevel werd het ineenstorten dus geremd, terwijl dit nabij de polen niet zo was. Het natuurlijke resultaat daarmee was dat de nevel af begon te platten en een schijf begon te vormen.
De nevel draaide in een bepaalde richting om zijn as, de eerder genoemde *tegen de klok in richting*. Deze draairichting werd op natuurlijke wijze overgenomen door de rotatie van de zon, die in het centrum van de nevel aan het vormen was, en de gas- en stofschijf rondom de jonge zon. De planeten die vervolgens uit de schijf ontstonden namen deze draairichting op hun beurt weer over van de schijf, zowel qua omlooprichting rond de zon als rotatie om hun eigen as. De jonge gasplaneten werden zelf ook door een eigen, kleinere, schijf materie omringt waaruit manen konden ontstonden. Deze kleinere schijven, en de daaruit voortkomende manen, namen op hun beurt weer de draairichting van hun moederplaneten over, zowel qua omlooprichting als rond de planeet als rotatie om hun eigen as. Het resultaat was de eerder beschreven dynamica in het zonnestelsel.

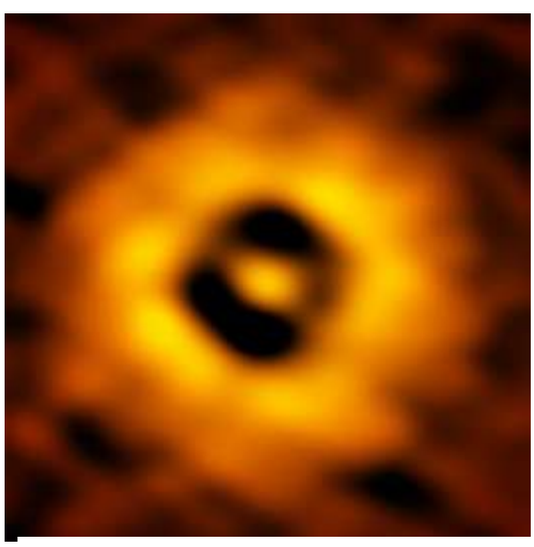
2.4 De vorming van de planeten

De vorming van de planeten uit de gas- en stofschijf ging als volgt. Het gas in de zonnenevel kon, wanneer de temperatuur laag genoeg was, condenseren. Door *condensatie* ontstonden kleine stofdeeltjes. Deze kleine stofdeeltjes

botsten met elkaar en bleven aan elkaar plakken, waardoor ze grotere stofdeeltjes vormden. Dit proces herhaalde zich en in de loop van de tijd ontstonden er steeds grotere stofdeeltjes. Dit proces van botsen en blijven plakken heet *accretie*. Door middel van accretie ontstonden uiteindelijk zogenaamde *planetesimalen*, objecten van typisch een kilometer groot, die verder uiteen begonnen te groeien tot *protoplaneten*, objecten van typisch 100 tot 1.000 kilometer groot. Protoplaneten die groot genoeg werden, zo'n 15 aardmassa's, konden tenslotte nog gas uit de zonnenevel in gaan vangen, een proces dat *gravitational collapse* wordt genoemd. Niet al het materiaal in de gas- en stofschijf werd gebruikt om planeten te vormen. De planetesimalen en protoplaneten die niet gebruikt werden voor het vormen van planeten zien wij tegenwoordig als asteroïden en kometen.



Figuur 37a: Protoplanetaire schijf van TW Hydrae



Figuur 37b: Detail van het centrum van de protoplanetaire schijf.

De schijf van stof en gas, die de jonge ster omringt, is de plaats waar de planeten worden gevormd. Op deze afbeelding van ALMA (fig. 33a) zien we een 10 miljoen jaar jonge ster TW Hydrae die op ongeveer 175 lichtjaar afstand staat. Op de afbeelding van het centrum van de schijf (fig. 33b) zien we met een resolutie van 1 AE een donkere ring rondom de ster. Hier kan zich een planeet zoals onze aarde hebben gevormd. Andere zichtbare donkere ringen liggen op afstanden van 3 en 6 miljard km van de ster. Ook deze donkere ringen zijn het gevolg van een gevormde planeten op deze afstanden die het stof en gas uit hun baan hebben geveegd.
TW Hydrae is de dichtst bij de aarde staande protoplanetaire schijf. Zo ongeveer moet ook ons planetenstelsel er ca. 4,5 miljard jaar geleden hebben uitgezien.

2.5 Chemie van het zonnestelsel

We hebben gezien dat de aardse planeten relatief dicht bij de zon staan, een lage massa hebben en hoofdzakelijk bestaan uit rotsachtige (d.w.z. vaste of niet-vluchtige) materialen. De gasreuzen daarentegen staan relatief ver weg, hebben een hoge massa en bestaan vooral uit gas- en ijsachtige (vluchtige) materialen. Hoe wordt dit verklaard? Hiervoor moeten we kijken naar de temperatuur in de zonnenevel waaruit het zonnestelsel ontstond en hoe deze temperatuur varieerde met de afstand tot de jonge zon.

Dichtbij de zon was de temperatuur zo hoog dat zelfs rotsachtige materialen niet konden condenseren uit de zonnenevel. Op grotere afstand van de zon werd de temperatuur lager en vanaf een zekere afstand tot de zon konden rotsachtige materialen beginnen te condenseren uit de zonnenevel. Nog verder bij de zon vandaan werd de temperatuur nog lager en konden uiteindelijk ook vluchtige materialen gaan condenseren.

De aardse planeten die dichtbij de zon ontstonden hadden dus voornamelijk rotsachtige materialen tot hun beschikking om zichzelf mee te vormen. Echter, van deze materialen is doorgaans, t.o.v. de meer vluchtige materialen, relatief weinig aanwezig. Hierdoor hadden de protoplaneten die vormden een relatief lage massa en deze protoplaneten waren daarmee ook niet in staat om extra gas uit de zonnenevel in te vangen (geen gravitational collapse). Verder was het dichtbij de zon moeilijk om vluchtige materialen, voor zover die er waren, vast te houden. Wanneer de gemiddelde temperatuur van een gas namelijk te hoog is, hebben de deeltjes in dat gas een hoge gemiddelde snelheid en kunnen ze makkelijker van een planeetoppervlakte ontsnappen. Het resultaat was dat er dichtbij de zon kleine, rotsachtige, planeten met een lage massa ontstonden.

De gasplaneten vormden zich verder bij de zon vandaan, in eerste instantie ook uit rotsachtige materialen, waar, t.o.v. de meer vluchtige materialen, wederom relatief weinig van aanwezig is. Echter, verder bij de zon vandaan hadden de planeten die daar vormden ook vluchtige, ijsachtige, materialen tot hun beschikking, waar juist relatief veel van aanwezig was. Hierdoor konden protoplaneten met een relatief hoge massa vormen die met hun grote massa ook nog eens extra gas uit de zonnenevel konden invangen (gravitational collapse). Daarbij was het verder bij de zon vandaan, waar de gemiddelde temperatuur in de zonnenevel lager was, ook nog eens makkelijker om vluchtige materialen vast te houden. Verder zijn ijsachtige materialen een erg goed middel om deeltjes die met elkaar botsen goed aan elkaar te laten plakken, wat het accretieproces bevordert. Het resultaat was dat er verder bij de zon vandaan groter gasplaneten ontstonden met een hoge massa.

2.6 Exoplaneten

Bovenstaande beschrijving werkt prima voor ons zonnestelsel. Echter, toen de eerste *exoplaneten*, d.w.z. planeten rondom andere sterren, ontdekt werden zaten daar ook Jupiter-achtige gasreuzen tussen die slechts ongeveer op een afstand van Mercurius tot de zon (0.4 AE) van hun moederster afstaan. Deze *hete Jupiters* zoals ze genoemd worden kunnen niet met het bovenstaande mechanisme alleen verklaard worden. Daar is nog iets anders voor nodig. Computermodellen hebben aangetoond dat deze hete Jupiters in eerste instantie vormen op de afstand die we typisch ook zien voor de gasreuzen in ons zonnestelsel. Echter, de hete Jupiters zijn op een gegeven moment naar binnen gaan *migreren*, onder invloed van zwaartekrachtswisselwerkingen tussen deze planeten en de gas- en stofschijf rondom de ster. De migratie hield daarbij pas op toen de gas- en stofschijf verdwenen was. Hierdoor zijn veel gasreuzen op afstanden dicht bij hun moederster terecht gekomen. Een bijkomend effect van de migratie van deze gasreuzen is waarschijnlijk dat andere planeten die zich vormden rondom deze sterren bij hun moederster weggeslingerd zijn. Deze *rogue planets* zwerven nu wellicht als wezen door de interstellaire ruimte.

Meten aan sterren

1 Inleiding

In de vorige hoofdstukken heb je gezien hoe we vanuit de waarnemingen van de oude Grieken uiteindelijk terecht zijn gekomen bij het wereldbeeld zoals dat rond 1600 gevormd is. In de afgelopen eeuw is onze kennis over het heelal en zijn structuur behoorlijk gegroeid dankzij de betere waarnemingstechnieken die tegenwoordig tot onze beschikking staan. In dit hoofdstuk gaan we kijken hoe we dankzij waarnemingen aan sterren meer te weten kunnen komen over deze sterren. Als gevolg hiervan krijgen we ook meer inzicht in de grootte van het heelal en zijn structuur. Het is belangrijk om te beseffen dat we van sterren, zelfs met de grootste telescopen die we op aarde hebben, nooit veel meer kunnen zien dan een lichtpuntje aan de hemel. Toch geeft dit kleine beetje licht dat wij ontvangen zoveel informatie dat we daaruit meer informatie kunnen krijgen over de eigenschappen en levensloop van deze sterren. In dit hoofdstuk zullen we zien hoe we met behulp van de parallaxmetingen, zoals we die in het hoofdstuk DE ONTWIKKELING VAN ONS WERELDBEELD tegenkwamen, meer te weten zijn gekomen over de massa, grootte, beweging en lichtkracht van sterren. Uit deze gegevens kunnen we vervolgens weer conclusies trekken over hoe sterren van elkaar verschillen, hoe ze gevormd worden, hoe hun leven zich ontwikkelt en hoe ze dood gaan. In het volgende hoofdstuk zullen we daar meer aandacht aan besteden, maar eerst gaan we kijken hoe we metingen verrichten om de eigenschappen van sterren te bepalen.

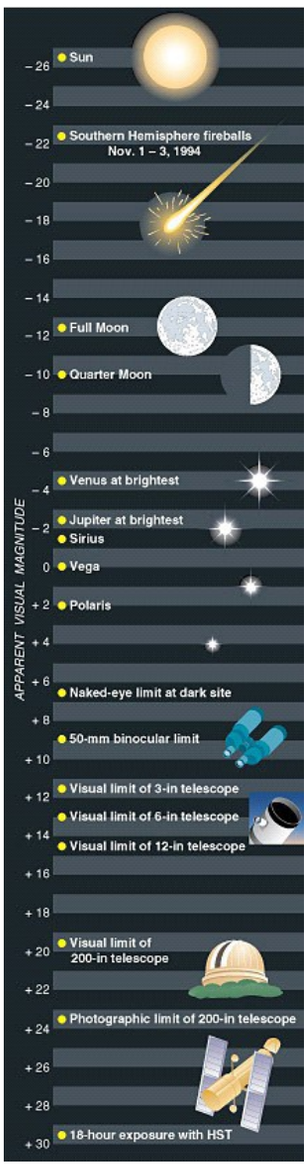
2 Lichtkracht

lichtkracht

Wanneer we het hebben over de helderheid van een ster moeten we onderscheid maken tussen de schijnbare helderheid en de *lichtkracht L*. De lichtkracht van een ster is de totale hoeveelheid energie die een ster per seconde de ruimte instuurt, oftewel het vermogen van de ster. Dit is dus vergelijkbaar met het wattage van een gloeilamp. Om een idee te krijgen, de lichtkracht van onze zon is ongeveer $3{,}85.10^{26}$ W. Dit is dezelfde hoeveelheid energie per seconde als de energie die vrijkomt bij de explosie van 4.000 miljard atoombommen. De energie die de aarde van de zon ontvangt in één seconde is genoeg om 10.000x aan de energiebehoefte van de gehele wereldbevolking voor een jaar te voldoen.

schijnbare helderheid

De *schijnbare helderheid* is de energiestroom (ook wel: gemeten flux f_λ) zoals je die waarneemt op een bepaalde afstand van een ster in W/m^2.



De kwadratenwet (vgl. 1), zoals we die bij natuurkunde geleerd hebben, laat duidelijk zien hoe de energie die door de zon (of welke ster dan ook) wordt uitgestraald verdeeld wordt in de ruimte. Het oppervlak van een bol, met als middelpunt de zon, neemt kwadratisch toe met de afstand tot de zon. Oftewel een bol 2x zo ver weg van de zon heeft een 4x zo groot oppervlak. Dit betekent dus ook dat als je 2x zo ver weg van de zon bent dat de energie dan over een 4x zo groot oppervlak verdeeld wordt, en dat er dus ¼ x zoveel energie door 1 m^2 gaat. De gemeten flux is dan dus ook 4x zo klein. Deze formule geeft dus het verband tussen de gemeten flux en de lichtkracht van een ster.

$$f_\lambda = \frac{L}{4\pi d^2} \qquad (1)$$

Hierin is f_λ de gemeten flux bij een bepaalde kleur licht (in W/m^2, L de lichtkracht (in W) en d de afstand van de waarnemer tot de ster (in m).

Opgave 1: LES experiment: Lichtkracht van de zon

Neem een gloeilamp van 100W.

a Bepaal bij welke afstand van de lamp je evenveel warmte voelt als van de zon op een zomerdag.

b Bereken de schijnbare helderheid van de lamp (in W/m^2).

c Leg uit waarom deze gelijk moet zijn aan de schijnbare helderheid van de zon.

d Bereken hieruit de lichtkracht van de zon, met behulp van de bekende afstand aarde-zon ($r_{a\text{-}z} = 149{,}6 \cdot 10^9$ m).

e De straal van de zon is $6{,}955.10^5$ km. Bereken de flux F_b van de zon aan het oppervlak.

Schijnbare magnitude

Hipparchus

schijnbare magnitude

Rond 200 v. Chr. leefde in het oude Griekenland een astronoom genaamd *Hipparchus*. Hij maakte een catalogus van zo'n 850 zichtbare sterren, waarbij hij de positie vastlegde, maar ook een nummer dat de helderheid van de schijnbare magnitude ster aangaf, de zogenaamde *schijnbare magnitude*. Hij deelde de sterren in zes groepen in, waarbij de helderste sterren magnitude 1 kregen en de zwakste sterren magnitude 6. Hiertussen verdeelde hij de sterren zo dat ze op het oog gelijke verschillen in helderheid hadden. Het verschil in helderheid tussen een magnitude 3 en 4 ster was dus gelijk aan het verschil tussen een magnitude 5 en 6 ster. Tegenwoordig meten we de helderheid met behulp van fotoapparatuur en electronica en is de schaal iets aangepast. Het bleek uit deze metingen dat als we een verschil van 1 magnitude zien we ongeveer 2,5x zo veel licht van een ster ontvangen. Iedere magnitude betekent dus 2,5x zo veel licht. Een verschil van 2 magnitudes is dus 2,5·2,5 = 6,25x zo veel licht. Een magnitude verandering van 5 komt dan overeen met $2{,}5^5$ (ca. 100x).

De schaal werd zo herschaald dat een magnitudeverschil van 5 exact overeen kwam met een verschil van 100x. Dus de factor werd aangepast tot 2,512x per magnitude.

Tegenwoordig kunnen we met CCD's magnitudeverschillen van 0,001 meten. Op de vorige pagina zie je een overzicht van de schijnbare magnitudeschaal zoals we die tegenwoordig kennen.

Met het blote oog kun je nog de 6^{e} magnitude zien. Met een 5-meter telescoop komen we tot de 25^{e} magnitude en de Hubble Space Telescope komt tot wel magnitude 30. Dit is dus $2{,}512^{24}$ = $4{,}0 \cdot 10^{9}$x zo weinig licht als dat we met het blote oog zien! Let op: een kleine magnitude betekent dus een grote helderheid en een grote magnitude een kleine helderheid!

Absolute magnitude

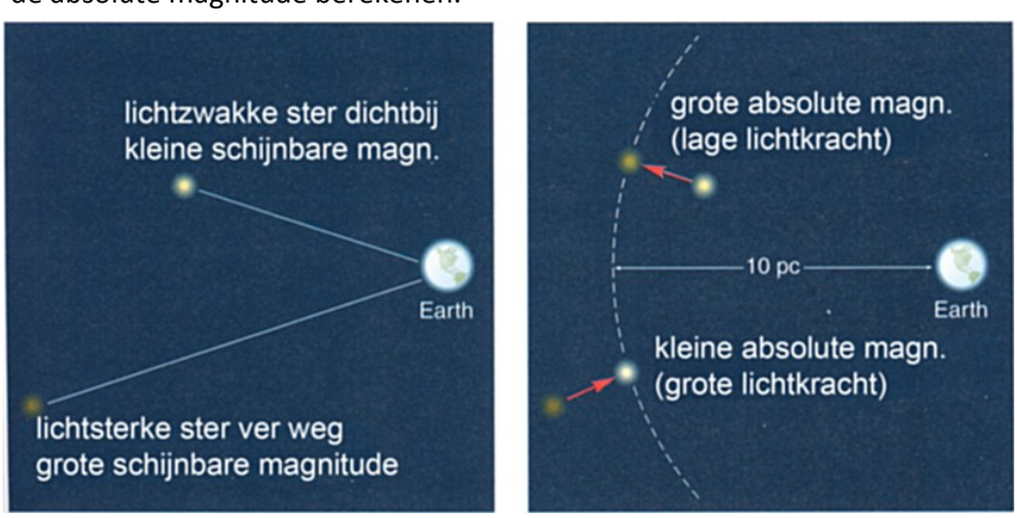
In de vorige paragraaf maakten we kennis met de schijnbare magnitude. Nu is er een probleem als we verschillende sterren met elkaar willen gaan vergelijken. De schijnbare magnitude wordt bepaald door twee factoren, namelijk de hoeveelheid licht die de ster uitstraalt, maar ook de afstand waarop de ster staat. De eerste factor is interessant als je sterren wilt vergelijken, maar de tweede factor zorgt ervoor dat je eigenlijk pas kunt vergelijken als je al de sterren op dezelfde afstand zou vergelijken.

absolute magnitude

In de sterrenkunde wordt dit gedaan door de *absolute magnitude* te gebruiken. Dit is de magnitude die de ster zou hebben als hij op een afstand zou staan van 10 parsec (32,6 lichtjaar).
De absolute magnitude is te berekenen met de volgende formule:

$$m - M = 5 \cdot \log(d) - 5 \qquad (2)$$

Dit noemen we ook wel de afstandsvergelijking. Hierin is *m* de schijnbare magnitude, *M* de absolute magnitude en *d* de afstand in parsecs. Als je dus de afstand tot een ster weet en zijn schijnbare magnitude weet kun je direct de absolute magnitude berekenen.



Figuur 1: Links: vanaf de aarde gezien kan een ster helderder lijken, alleen omdat hij dichterbij staat, niet omdat hij lichtsterker is. Rechts: door de sterren allemaal op dezelfde afstand te zetten (10 parsecs) kun je bepalen welke ster de grootste magnitude (= kleinste lichtkracht) heeft.

Opgave 2: voorbereiding: Absolute magnitude

Sirius is de helderste ster aan de hemel met een schijnbare magnitude van -1,43. Deze ster staat op 8,7 lichtjaar afstand van de aarde (zie ZWAARTE-KRACHT EN DE MODERNE ASTRONOMIE opg. 4).

a Bereken de absolute magnitude van Sirius

Ditzelfde had je kunnen berekenen m.b.v. de kwadratenwet: Als we Sirius verplaatsen van zijn werkelijke afstand van 8,7 lichtjaar naar een afstand van 32,6 lichtjaar dan wordt het licht dat we ontvangen zwakker. Met de kwadratenwet kun je uitrekenen dat als de afstand 3,75x zo groot wordt het licht ong. $\frac{1}{3{,}75^2} = \frac{1}{14}$ van het oorspronkelijke licht moet worden. Dat komt overeen met een magnitudeverschil van ongeveer 2,9 magnituden (want $2{,}52^{2{,}9}=14$).

b Komt het verschil van 2,9 magnituden overeen met wat je bij a berekend hebt?

De zon heeft een schijnbare magnitude van -26,73. We willen de zon vergelijken met Sirius.

c Bereken de afstand van de aarde tot de zon in lichtjaren

d Bereken de absolute magnitude van de zon

e Hoeveel keer zoveel licht komt er van Sirius in vergelijking met de zon?

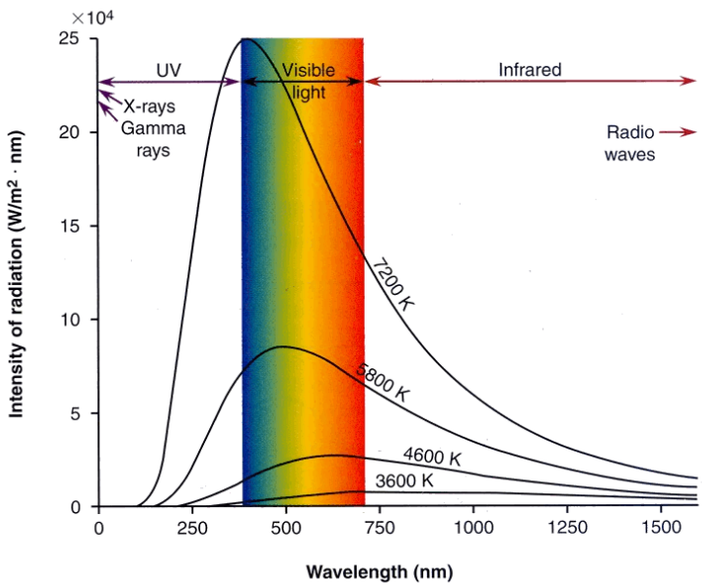
3 Oppervlaktetemperatuur van sterren

Als je naar de hemel kijkt dan kun je zien dat sterren niet allemaal dezelfde kleur hebben. De éne ster lijkt rood, terwijl de andere ster meer blauw lijkt. Het verschil in kleur heeft te maken met de temperatuur van de ster. Uit ervaring weet je misschien dat als je een metalen staaf in een vuur houdt dat hij eerst dieprood gaat gloeien en dan langzaam steeds geler lijkt te worden als de temperatuur stijgt. We kunnen dus gebruik maken van het licht van sterren om hun (oppervlakte)temperatuur te bepalen. Maar daarvoor moeten we wel eerst weten wat het verband is tussen temperatuur en kleur.

Als je de hoeveelheid straling (zowel zichtbaar als onzichtbaar zoals UV en infrarood) meet die van een voorwerp komt van een bepaalde temperatuur bij verschillende golflengten dan krijg je een figuur zoals fig. 2. Er lijkt dus een verband te zijn tussen de temperatuur en de golflengte waarbij de meeste straling wordt uitgezonden (λ_{max}). Het was de Duitse wetenschapper *Wilhelm Wien* die in 1893 dit verband, ook wel bekend als de wet van Wien, vond:

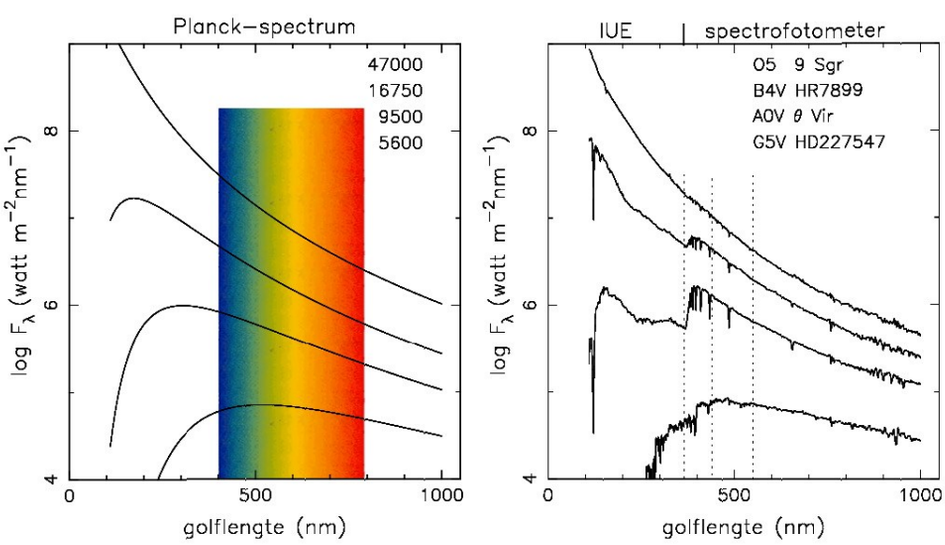
$$\lambda_{\max\,(in\ mm)} = \frac{2{,}898 \cdot 10^6}{T_{(in\ K)}} \qquad (3)$$

Met dit verband kun je dus de temperatuur van een ster bepalen alleen door te kijken naar de kleur van de ster!



Figuur 2: De onderste curve (3.600 K) vertoont een maximale straling bij λ = 805 nm, dit is vooral infrarood straling. Als de temperatuur stijgt dan zie je dat de maximale hoeveelheid straling bij kortere golflengtes wordt uitgezonden, en zo verschuift van rood naar steeds meer blauw.

Het verband zoals Wien dat vond kwam uit theoretische berekeningen van een zogenaamd zwart lichaam. Dit zijn objecten die alle golflengten licht volledig absorberen (of uitzenden). De vraag is of dit ook geldig is voor sterren. In fig. 3 zie je de theoretische curves vergeleken met een aantal sterren. Het blijkt dat we over het algemeen sterren als een zwart lichaam mogen beschouwen en dat de wet van Wien dus ook geldig is voor sterren.



Figuur 3: Links: De curves voorspeld door de wet van Wien voor stralers met verschillende temperaturen. Ter oriëntatie is het visuele deel van het spectrum ingekleurd. De temperaturen staan rechtsboven. Rechts: sterspectra gemeten in het zelfde golflengtegebied.

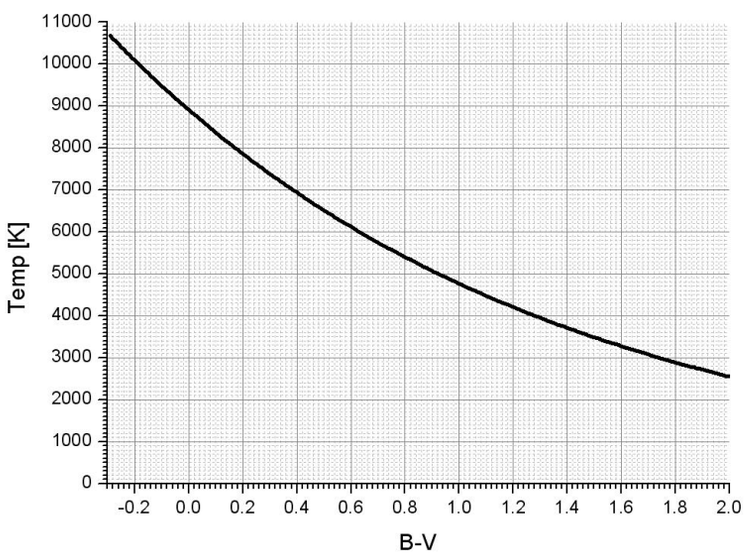
In de praktijk blijkt het iets lastiger om de temperatuur zo te bepalen. Om te vinden bij welke golflengte de maximale straling wordt uitgezonden moet je namelijk bij alle golflengten de intensiteit meten en daarvoor is dure apparatuur nodig. Daarom maken we in de sterrenkunde vaak gebruik van een zogenaamde index. Dit is een verschil tussen de intensiteit van twee vooraf bepaalde golflengten om uit het verschil de temperatuur te bepalen. Het voordeel van deze methode is dat je maar twee metingen hoeft te doen om de temperatuur te bepalen, zonder dat je daarvoor dure apparatuur nodig hebt. Iedere professionele sterrenwacht heeft een aantal standaard-filters beschikbaar waarmee sterren bekeken kunnen worden. Dit zijn de volgende filters

Filter	λ [nm]
Ultraviolet	320-400
Blue	400-500
Visible	500-700
Red	550-800
Infrared	700-900

Tabel 1: Meest gebruikte filters in sterrenwachten.

B-V index

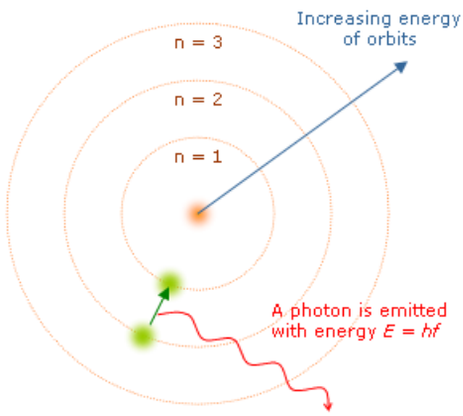
Een rode ster zal dus door een roodfilter een grotere helderheid hebben dan door een blauwfilter, terwijl voor een blauwe ster het omgekeerde geldt. Door te kijken naar het verschil in magnitude tussen een blauw en het rode filter kun je dan een *B-V index* geven. Voor een blauwe (en dus hete) ster zal B-V een negatief getal geven, want B is klein (grote helderheid = kleine magnitude) en V is groot, terwijl een rode ster juist een positief getal geeft. De index die je zo krijgt varieert voor sterren tussen de -0,3 en 2,0. In fig. 4 kun je met behulp van de B-V index direct de oppervlaktetempe-ratuur van de ster aflezen.



Figuur 4: De temperatuur van een ster uitgezet tegen de B-V index.

Alternatieve temperatuurbepaling met behulp van het spectrum

Bij de natuurkundeles hebben we al kennis gemaakt met het atoommodel van Bohr. Hierin draaien elektronen in schillen om een kern in een atoom. Hij voorspelde dat elektronen alleen maar bepaalde energieën kunnen bezitten, en daarom niet in willekeurige banen kunnen draaien. Door energie aan een atoom toe te voegen (bijv. door botsing met fotonen) kunnen de elektronen naar een hogere baan gaan doordat ze de energie van het foton opnemen. Ook kan een elektron van een hogere baan terugvallen naar een lagere baan, waarbij de energie weer in de vorm van lichtfotonen wordt uitgezonden. Omdat de elektronen alleen bepaalde energieën kunnen hebben zijn niet alle fotonen geschikt om een elektron naar een andere baan te sturen, dit omdat de energie van een foton bepaald is door zijn frequentie volgens:



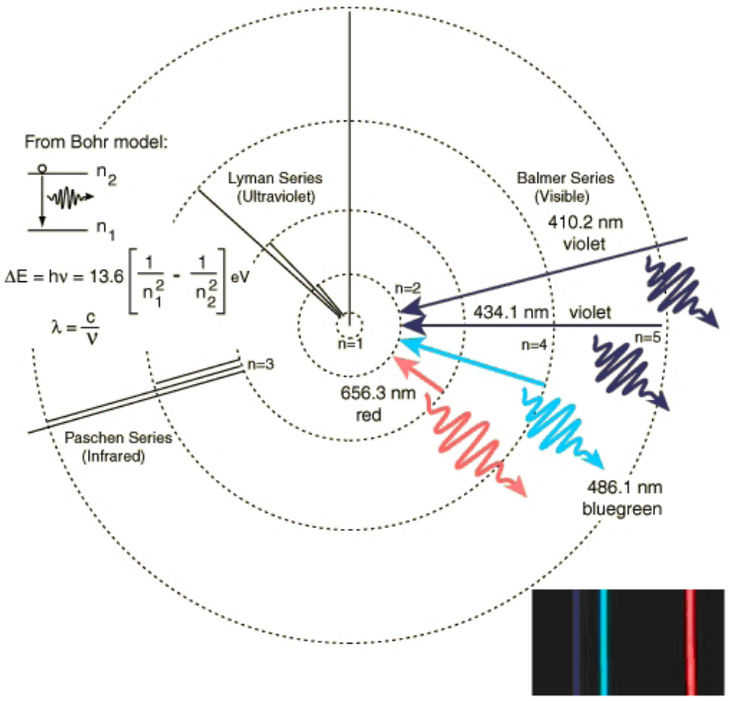
Figuur 5: Het atoommodel van Bohr.

$$E_f = h \cdot f, met\ h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} Js \qquad (4)$$

Soms gebeurt het uitzenden in meerdere stapjes en dan ontstaan er dus meerdere lichtfotonen met een lagere energie (d.w.z. meer richting het rood en infrarood). Als je dus licht met alle frequenties door een gas heen stuurt, zul je een aantal donkere lijnen te zien krijgen op de frequenties die overeenkomen met de energie die nodig is om elektronen in dat gas naar een hogere baan te krijgen. Deze elektronen vallen even later weer terug, maar doordat het licht dan in alle richtingen kan worden uitgezonden zul je dit nauwelijks meer zien in het spectrum. Hetzelfde principe vindt plaats in een ster. Het licht dat uit het hart van een ster komt bestaat uit licht met alle frequenties. Dit komt doordat door de hoge druk in de ster de energieniveaus van de atomen verstoord raken, waardoor vrijwel alle frequenties uitgezonden kunnen worden. Dit licht moet echter door de atmosfeer van de ster, en daar zullen de aanwezige gassen bepaalde frequenties uitfilteren. Dit zul je dus zien in het spectrum van de ster als donkere lijnen, de zogenaamde *Fraunhoferlijnen*. Dit noemen we ook wel een absorptiespectrum. Het blijkt dat als je naar verschillende sterren kijkt dat je verschillende spectra te zien krijgt waarin de lijnen verschillen. Het was *Annie J. Cannon*, een astronome aan de Harvard universiteit, die voor het eerst een indeling van sterren maakte op basis van hun spectra. Hierbij deelde zij de sterren in op basis van de sterkte van de lijnen die veroorzaakt worden door waterstof in het spectrum. Hierbij gaf zij de sterren een letter mee, van A t/m O, waarbij A de sterkste lijnen vertoonde en O de zwakste. Dit noemen we ook wel de *spectraalklassen*.

Fraunhoferlijnen

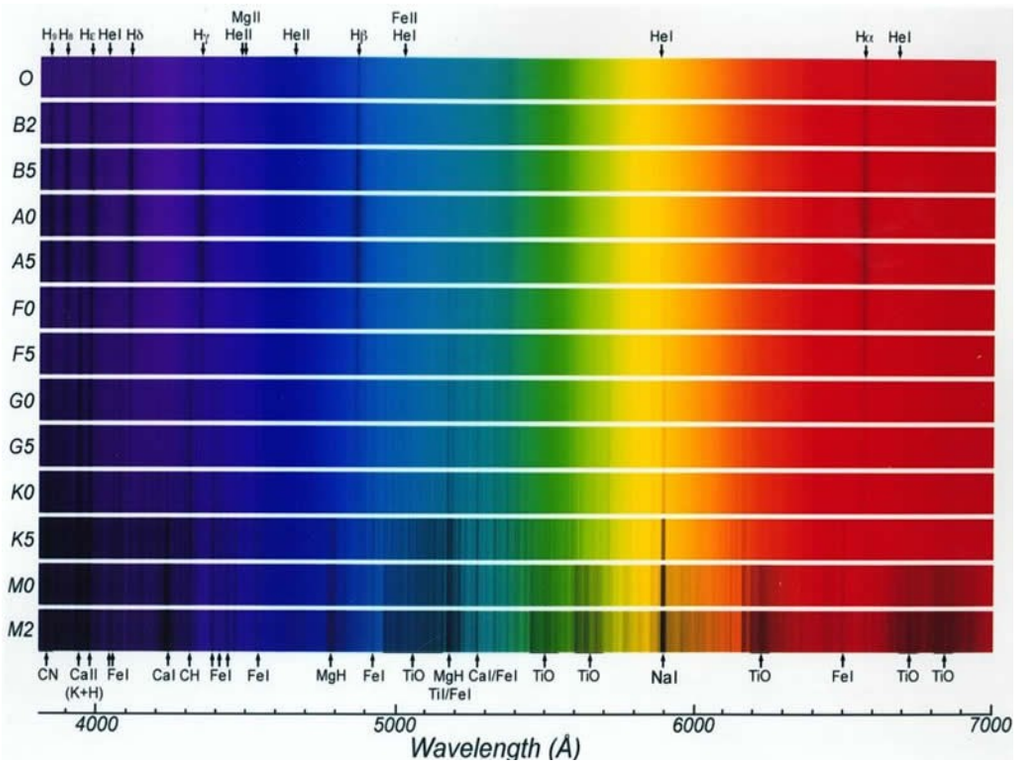
spectraalklassen



Figuur 6: De verschillende golflengten die waterstof uit kan zenden.

In fig. 6 zie je de golflengtes van de spectraallijnen die waterstof kan creëren op basis van de bekende energieniveaus. De overgangen vanaf het grondniveau noemen we de Lyman serie, de overgangen vanaf het tweede niveau de Balmer serie en de overgangen vanaf het derde niveau de Paschen serie. Wanneer de temperatuur laag is dan zullen de elektronen zich vooral in de grondtoestand bevinden (n=1). Wanneer een elektron dan door een foton naar een hoger niveau wordt gezonden dan zullen er vooral lijnen uit de Lyman serie (ultraviolet) zichtbaar zijn. Wanneer de temperatuur toeneemt zullen er steeds meer elektronen in het tweede energieniveau (n=2) terechtkomen door de grotere energie die de atomen bij zich hebben. Wanneer er dan een foton langskomt zal er een overgang plaatsvinden in de Balmer serie. Dus er worden nu ook spectraallijnen zichtbaar in het zichtbare licht. Bij nog hogere temperaturen verschuiven de overgangen naar de Paschen serie (infrarood). Als je kijkt naar fig. 7 dan zie je hier een aantal lijnen, o.a. de Hα-lijn op 656 nm (6.560 Å) en de Hβ-lijn op 486 nm (4.860 Å). Dit zijn twee lijnen uit de Balmer serie. In deze figuur zijn de sterren geordend op temperatuur van de ster. Je ziet dat de volgorde nu anders is dan die van Cannon. Verder zijn er een aantal letters verdwenen. Verder zijn de klassen nu onderverdeeld in 10 kleinere stappen. Iedere ster krijgt dus een letter-cijfercombinatie die de spectraalklasse aanduidt.[1] We kijken nu in meer detail naar de Hβ -lijn. We zien dat inderdaad bij de ster met een lage temperatuur (M en K) deze lijn nauwelijks zichtbaar is. Als de temperatuur toeneemt dan zie je dat bij spectraalklasse A de lijn het duidelijkst is en dat hij hierna weer afneemt als de sterren nog heter worden. Uit de sterkte van meerdere lijnen kun je dus een temperatuur bepalen.

[1] Een trucje om de volgorde (OBAFGKM) te onthouden is de volgende zin: Oh, Be A Fine Girl (Guy) Kiss Me!, waarbij geldt dat O de heetste sterren zijn en M de koudste sterren.



Figuur 7: Spectra van sterren met een verschillende temperatuur (Let op 1 nm = 10 ångström).

4 De grootte van sterren

Tot nog toe hebben we gekeken naar de temperatuur en lichtkracht van sterren. Met behulp van deze gegevens is het mogelijk om de grootte van sterren te gaan bepalen. Maar daar hebben we nog één gegeven voor nodig en dat is de hoeveelheid energie die een ster per m^2 uitzendt, de F_b. Als we dan weten wat de totale hoeveelheid licht is die de ster uitzendt (en dat kunnen we bepalen door de absolute magnitude te vergelijken met die van de zon) dan weten we ook het oppervlak van de ster en dus ook de straal. Als we nog eens kijken naar fig. 2 dan zien we dat een ster die warmer is ook meer straling uit gaat zenden. Er blijkt een verband te zijn tussen de temperatuur van een voorwerp en de hoeveelheid straling (in W/m^2) dat het voorwerp aan het oppervlak uitzendt. Dit verband is rond 1880 door J. Stefan en L. Boltzmann uitgewerkt en kennen we tegenwoordig als de wet van Stefan-Boltzmann:

$$F_b = \sigma T^4 \quad met\ \sigma = 5{,}67051 \cdot 10^{-8} W m^{-2}\ en\ T\ in\ K \tag{5}$$

We kunnen nu dus zeggen dat de lichtkracht het oppervlak van de ster is keer de oppervlakteflux F_b van de ster, dus:

$$L_{(in\,W)} = A \cdot F_b = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{6}$$

Weet je dus de lichtkracht van een ster en de oppervlaktetemperatuur dan weet je gelijk de straal van de ster.

Opgave 3: verwerking: Grootte van sterren

Betelgeuze is een zogenaamde rode superreus in het sterrenbeeld Orion. We zullen nu kijken waarom deze ster zo wordt genoemd. Betelgeuze staat op een afstand van 640 (±140) lichtjaar van de aarde en heeft een schijnbare magnitude van 0,58.

a Bereken op basis van de gegeven waarde voor de afstand (besef dat de nauwkeurigheid niet zo groot is!) de absolute magnitude van Betelgeuze.

b De absolute magnitude van de zon is 4,83. Hoeveel keer meer energie straalt Betelgeuze uit dan de zon? Hoe groot is de lichtkracht van Betelgeuze?

Betelgeuze heeft een oppervlaktetemperatuur van 3.000 K.

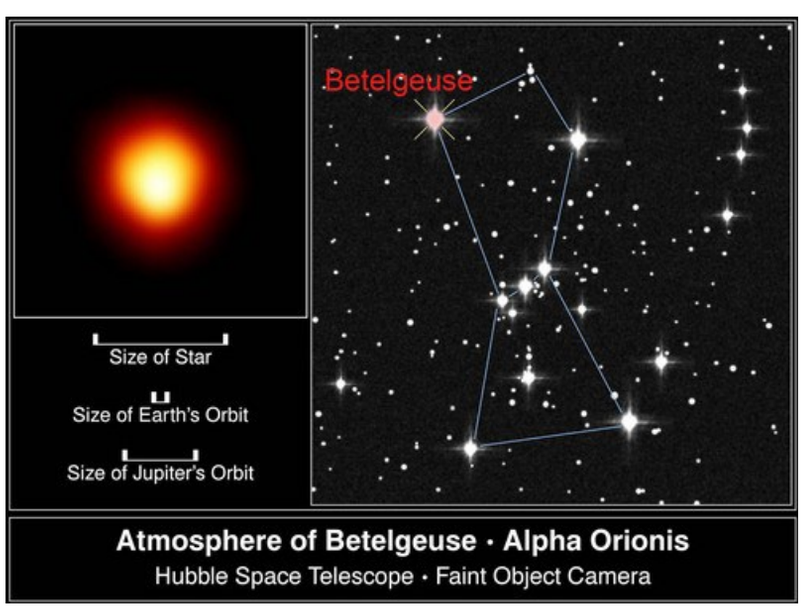
c Bereken de straal van Betelgeuze met behulp van de verkregen gegevens. Vergelijk dit met de afstand van de aarde tot de zon.

d Leg uit waarom Betelgeuze een rode superreus heet.

Naast rode reuzen bestaan er ook witte dwergen. Een voorbeeld hiervan is IK Pegasi op een afstand van 150 (±5) lichtjaar met een schijnbare magnitude van 10,44. Deze ster heeft een oppervlaktetemperatuur van 35.500 K.

- Beantwoord bovenstaande vragen ook voor deze witte dwerg.
- Waarom noemen we dit een witte dwerg?

Besef dat de metingen die gebruikt zijn om de straal te berekenen een nauwkeurigheid hebben die vaak relatief laag is (10% in de sterrenkunde is al erg nauwkeurig), en dat de waarden die je krijgt dan ook een indicatie geven van de grootte van de ster, niet een heel precieze waarde!



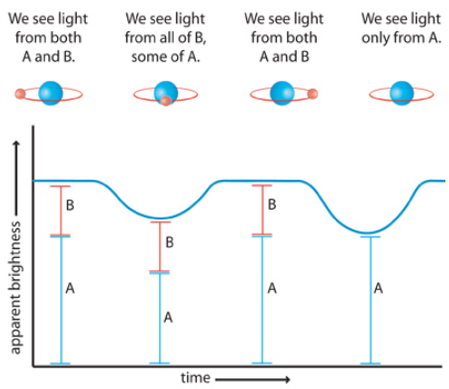
Figuur 8: De grootte van Betelgeuze is ook direct bepaald door de Hubble Space Telescope.

De grootte van dubbelsterren

De grootte van sterren is dus te berekenen, maar in sommige gevallen kan de grootte van een ster ook worden gemeten. Dit is echter vrij zeldzaam omdat sterren zo ver weg staan dat ze in telescopen nog steeds als puntjes te zien zijn. Gelukkig is er een groep sterren waarvan we de straal wel kunnen meten en dat zijn de zogenaamde eclipserende dubbelsterren (dit is maar een heel klein gedeelte van alle dubbelsterren die we kunnen zien). In

eclipserend dubbelsterren

eclipserende dubbelsterren bewegen de sterren vanaf de aarde gezien beurtelings voor elkaar langs en blokkeren zo elkaars licht. Dit betekent dus dat het baanvlak van de ster precies zo moet liggen dat je er van opzij tegen aankijkt. Zie figuur 9. Als de sterren elkaar niet verduisteren, zien wij het licht van beide sterren. Op het moment dat de ene ster net voor de ander begint te schuiven, neemt de hoeveelheid op aarde gemeten licht van de dubbelster af. Als de omlooptijd bekend is en je weet hoe lang het duurt totdat de ster volledig voor de andere ster is geschoven kun je de straal berekenen. Hoewel vrijwel alle sterren er ook door een telescoop uitzien als puntjes, heeft men van enkele nabije sterren de straal wel direct kunnen meten. Dit biedt een controle op de berekeningen die we eerder zagen.



Figuur 9: een eclipserende dubbelster.

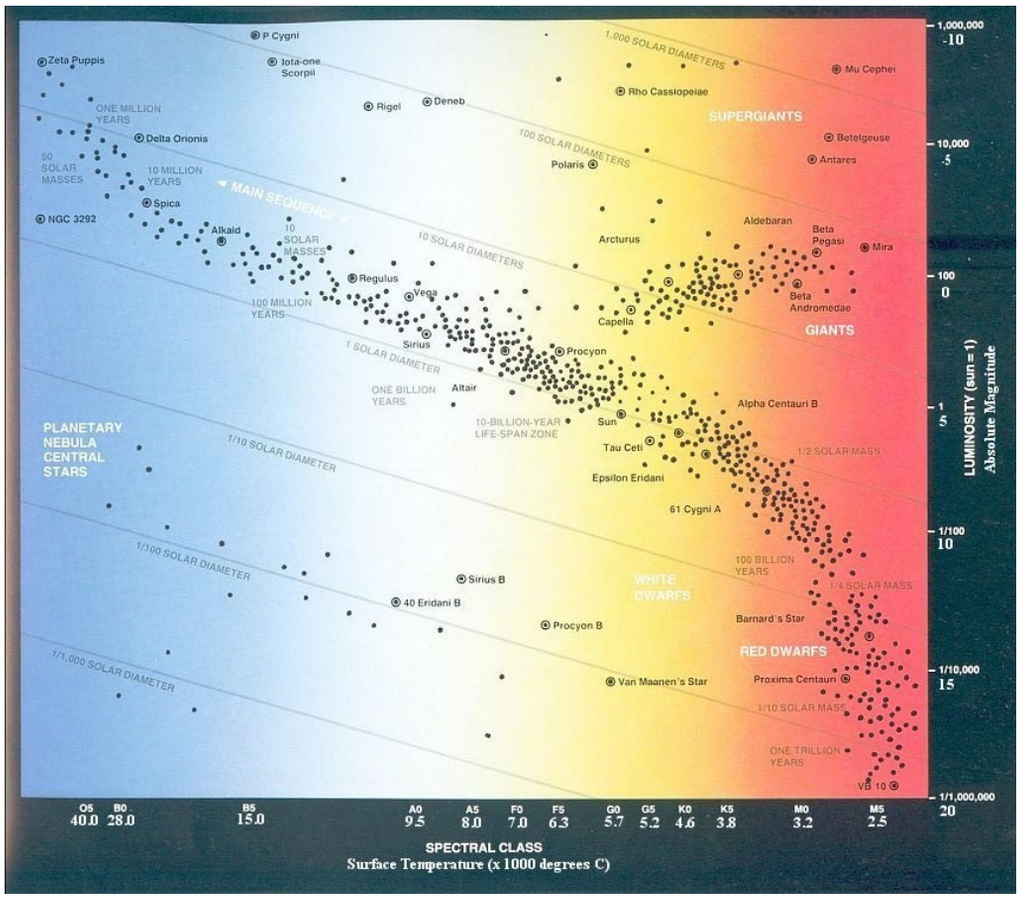
5 Hertzsprung-Russell (HR) diagrammen

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat de hoeveelheid licht die een ster uitstraalt, de grootte van de ster en de temperatuur met elkaar samenhangen. Zie bijvoorbeeld vgl. 6:

$$L = 4\pi R^2 \sigma {T_{eff}}^4$$

Voor zover we nu weten zijn er voor een ster met straal *R* nog oneindig veel mogelijkheden voor lichtkracht en temperatuur, zo lang *L, R* en *T* samen maar aan bovenstaande vergelijking voldoen. Maar misschien zijn er wel meer verbanden tussen deze grootheden, die we nog niet kennen. Hoe komen we daar achter? Als we van heel veel sterren twee van deze drie grootheden weten, kunnen we al die meetpunten in een diagram zetten en kijken of er een patroon zichtbaar wordt. Zo'n diagram wordt het *Hertzsprung-Russell-diagram* genoemd, naar de sterrenkundigen die rond 1910 als eersten zo'n diagram maakten. In dit diagram wordt de lichtkracht van sterren uitgezet tegen de temperatuur (en dus ook spectraalklasse) van de ster. Hierbij worden de sterren met de hoogste temperatuur links gezet en de lagere temperaturen rechts.

HR-diagram



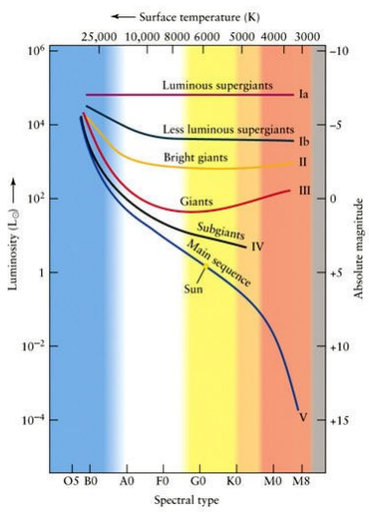
Figuur 10: Een Hertzsprung-Russell diagram met daarin de sterren uit onze directe omgeving. Duidelijk is de hoofdreeks te zien en de groepen reuzen/superreuzen en witte dwergen.

hoofdreeks

Omdat we het verband kennen tussen straal, lichtkracht en temperatuur kunnen we in het diagram ook lijnen trekken waardoor je direct de straal af kunt lezen van de sterren, zoals in fig. 10 te zien is. Duidelijk te zien is dat er een band is waarin ongeveer 90% van de sterren zich bevindt. Deze band noemen we ook wel de *hoofdreeks*. In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe we deze hoofdreeks kunnen verklaren. Daarnaast zien we nog drie opvallende groepen sterren, namelijk de witte dwergen, kleine maar zeer hete sterren, rode reuzen, relatief koude, maar heel grote sterren en de rode superreuzen, die nog groter zijn. Daarnaast zijn er ook gebieden waar zich geen sterren bevinden, blijkbaar zijn deze combinaties niet mogelijk volgens de wetten van de natuur.

Herkennen van stergrootte uit het spectrum

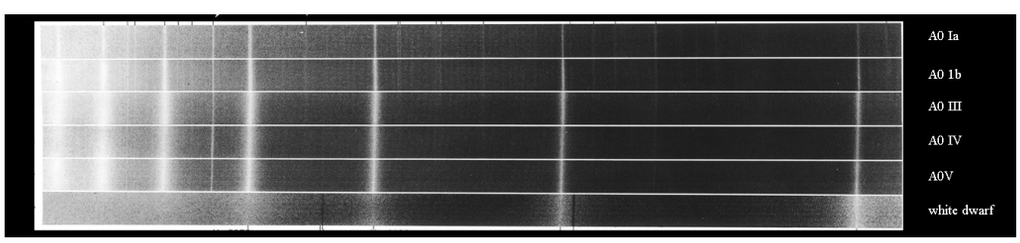
Uit het HR-diagram blijkt dat het merendeel van de sterren zich bevindt in de hoofdreeks. Er zijn echter ook een aantal andere sterren die extreem groot of klein zijn ten opzichte van de hoofdreekssterren. Deze sterren wil je graag kunnen herkennen op basis van eigenschappen in hun spectrum en dat blijkt in de praktijk ook vrij gemakkelijk te kunnen.



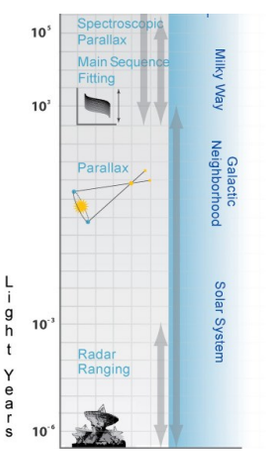
Figuur 11: Lichtkrachtklassen van sterren.

Rode reuzen en witte dwergen blijken massa's te hebben die helemaal niet zo veel verschillen. Dit is te meten uit bewegingen van dubbelsterren. Rode reuzen zijn dus grote opgezwollen sterren met een relatief kleine massa ten opzichte van hun grootte. Dat wil zeggen dat de dichtheid van deze sterren laag is ($1{,}0\cdot10^{-4}$ kg/m^3). Witte dwergen zijn juist relatief zwaar ten opzichte van hun grootte en hebben dus een hele hoge dichtheid ($1{,}0\cdot10^{9}$ kg/m^3). We zagen eerder dat een hoge druk zorgt voor het uitsmeren van de spectraallijnen doordat de energieniveaus ver-stoord raken. Ditzelfde geldt voor de absorptielijnen. Als de atmosfeer van een ster een hele hoge dichtheid heeft dan zullen de absorptielijnen ook uitgesmeerd worden en breder lijken, terwijl een atmosfeer met een lage dichtheid juist hele scherpe lijnen geeft (zie fig. 12). Zo kun je sterren indelen in *licht-krachtklassen*, die afhankelijk zijn van de dichtheid (en dus de straal) van de ster. Er zijn in totaal vijf klassen gedefiniëerd, die worden aangegeven met de Romeinse cijfers I-V (zie fig. 11). Zo heeft de zon een spectraalklasse G2 en lichtkrachtsklasse V, dit geven we aan met G2V. Betelgeuse (de rode superreus uit een vorige opgave) heeft een klasse M2Iab en Sirius-A (de helderste ster die we kunnen zien aan de hemel) A1V. De eerste is dus kouder dan de zon en veel groter, terwijl Sirius heter is dan de zon, maar zich wel in de hoofdreeks bevindt.

lichtkrachtklasse



Figuur 12: Spectra van verschillende sterren van het type A0. Je ziet dat bij een toenemende lichtkrachtklasse (dus een hogere dichtheid) de lijnen meer uitgesmeerd raken.



Figuur 13: De kosmische ladder voor ons melkwegstelsel.

5.1 De tweede stap van de kosmische ladder: afstandsbepaling met het HR-diagram

Tot nog toe hebben we alleen de parallax kunnen gebruiken om afstanden tot sterren te meten. Nadeel van deze methode is dat dit maar werkt tot zo'n 500 lichtjaar afstand, omdat de te meten parallax bij verder gelegen sterren te klein is. Maar hoe komen we dan aan de grotere afstanden binnen ons melkwegstelsel? Dit doen we met behulp van het HR-diagram dat we gevonden hebben.

We zien in dit diagram dat 90% van de sterren zich in de hoofdreeks bevindt. Als we aannemen dat wij ons niet in een bijzonder stukje heelal bevinden, dan zal dit ook gelden voor andere plaatsen in het heelal en ook in ons gehele melkwegstelsel. Als we dan uit het spectrum van een ster zien wat de spectraalklasse is kunnen we gelijk in het HR-diagram zien welke absolute magnitude daar bij moet horen. Maar als we de absolute magnitude weten en de schijnbare magnitude kunnen we met vgl. 2:

$$m - M = 5 \cdot \log(d) - 5$$

direct bepalen wat de afstand is tot die ster. Met deze methode is het in principe mogelijk om van sterren tot een afstand van zo'n 10^5 lichtjaar de afstand te bepalen. Deze methode is vooral geschikt voor hoofdreekssterren omdat deze in een vrij smalle band zitten, maar is ook bruikbaar voor andere typen sterren. Dit noemen we ook wel de *spectroscopische parallax*.

spectroscopische parallax

VOORBEELD De ster Tau-1 Gruis is een G0V ster (dus redelijk vergelijkbaar met de zon) die is waargenomen met een schijnbare magnitude van +6.3. We willen de afstand van deze ster bepalen met behulp van het HR-diagram (fig. 10). Uit het diagram kun je zien dat een G0V ster een absolute helderheid zal hebben tussen de +3 en +6. (Check dit!)
Nu kunnen we voor de twee uiterste mogelijkheden de afstand berekenen met vgl. 2.
M = + 3: 6.3 - 3 = 5 log(d) - 5, dus d = 45,7 parsec (= 149 lichtjaar)

M = + 6: 6.3 - 6 = 5 log(d) - 5, dus d = 11,5 parsec (= 37,4 lichtjaar)

Dus de ster ligt ergens tussen de 37,4 en 149 lichtjaar van ons vandaan. Dit lijkt een hele slechte bepaling, maar is in de praktijk, zeker voor de grotere afstanden, helemaal zo slecht nog niet. De werkelijke waarde die bepaald is voor deze ster is 108,58 lichtjaar, bepaald via de parallax.

Opgave 4: verwerking: Afstandsbepaling met HR-diagram

ζ Leporis is een A2V ster in het sterrenbeeld Haas. We zien deze ster met een schijnbare magnitude van +3.55

a Bepaal de minimale afstand waarop deze ster zal liggen.

b Bepaal de maximale afstand waarop deze ster zal liggen.

c De werkelijke afstand van deze ster is 70,2 lichtjaar. Klopt dit met je berekening?

Controleer je antwoord met de applet op
`http://astro.unl.edu/naap/distance/animations/spectroParallax.html`
Stel hier het type ster linksboven in de grafiek in en de lichtkrachtklasse en schijnbare magnitude rechtsonder (Let op de afstanden linksonder zijn daar in parsec!)

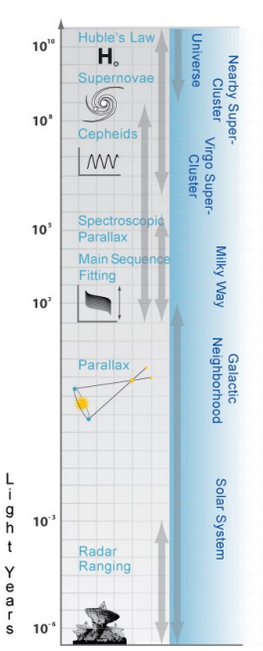
De methode zoals hier is getoond geeft nogal een ruime marge. Daarbij komt nog dat er geen rekening is gehouden met bijvoorbeeld stofwolken tussen de aarde en de ster, waardoor de helderheid die we zien minder groot is dan de waarde die je zou verwachten. In de praktijk wordt deze methode dan ook meestal op groepen sterren toegepast zoals die voorkomen in sterrenhopen.

Sterrenhopen zijn groepen van sterren die uit een gezamenlijke gaswolk zijn ontstaan (zie DE LEVENSLOOP VAN STERREN). Deze sterren blijven door hun onderlinge zwaartekracht bij elkaar en bevinden zich dus ook allemaal op ongeveer dezelfde afstand van de aarde. Sterrenhopen zijn er in twee soorten. *Open sterrenhopen* zijn kleine groepen sterren (tot zo'n 1.000 sterren meestal) die zich over een redelijk gebied verspreid hebben. Een voorbeeld hiervan zijn de Plejaden (beter bekend als het Zevengesternte, zie fig. 14). Daarnaast zijn er ook de *bolvormige sterrenhopen* die vaak tot wel 1.000.000 sterren bevatten en vaak ook veel ouder zijn (fig. 15).

open sterrenhopen

bolvormige sterrenhopen

Wanneer je nu een HR-diagram van zo'n sterrenhoop maakt met de schijnbare magnitudes kun je vrij gemakkelijk bepalen hoever de hoofdreeks in dit diagram verschoven is t.o.v. de bekende hoofdreeks. Dan weet je dus m-M uit vgl. 2 en kun je direct de afstand bepalen (zie fig. 17 voor de Plejaden). Deze methode is nauwkeuriger doordat je hier gebruikt maakt van een grote groep sterren in plaats van maar één ster. In de figuur zie je dat er een verschuiving nodig is van 5,5 magnituden, dus m-M = 5,5, hieruit volgt dat de afstand gelijk is aan 126 parsec (410 lichtjaar). Dit komt vrij goed in de buurt van de waarde van 440 lichtjaar zoals die nu aangenomen wordt.



Figuur 16: De kosmische ladder voor het heelal.

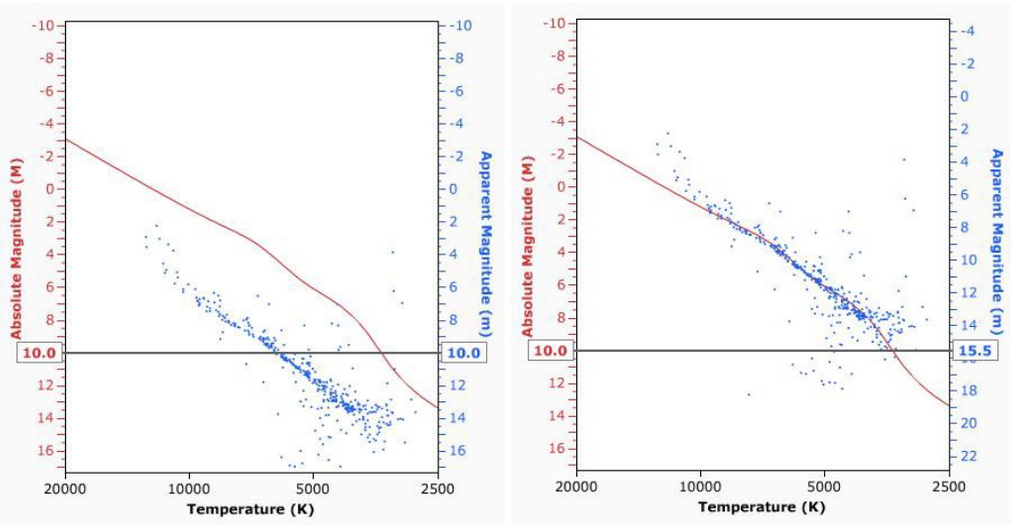
Figuur 14: De Pleiaden, een open sterrenhoop.

Figuur 15: M13 een bolvormige sterrenhoop in Hercules bevat ong. 500.000 sterren.

5.2 De derde stap van de kosmische ladder Magellaense wolken en Cepheïden

Vlakbij ons melkwegstelsel bevinden zich nog twee mini-melkwegstelsels, de grote en de kleine Magellaense wolken (fig. 19). De grote Magellaense wolk bevat zo'n $10 \cdot 10^{10}$ zonsmassa's en is dus een klein onregelmatig stelsel.

Het heeft geen spiraalvorm, zoals ons eigen stelsel, maar is meer een wolk van sterren. De afstand tot deze wolk sterren is bepaald door de main sequence fitting zoals in de vorige paragraaf is besproken (fig. 20). Deze afstand is bepaald met een afstandsmodulus van 18.50 (zie figuur) en dat houdt dus een afstand in van 50 kpc oftewel 163.000 lichtjaar.



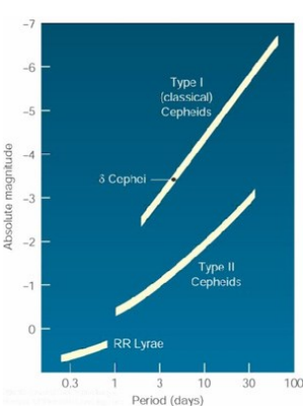
Figuur 17: De hoofdreeks van de Plejaden (afstand 440 lichtjaar) vergeleken met de hoofdreeks. Er is een verschuiving nodig van 5,5 magnituden om de reeks te laten fitten. Dit noemen we ook wel Main Sequence Fitting.

cepheïden

Al in 1784 werd er door John Goodricke een ster, Cephei, waargenomen aan de hemel die regelmatig van helderheid leek te veranderen. Deze verandering was niet te verklaren doordat het een dubbelster was, en moest dus te maken hebben met processen in de ster zelf. Later werden nog meer van deze sterren ontdekt, en die noemden ze *cepheïden*. De periode waarin de helderheid verandert varieert per ster (figuur op blz. 21). Deze variaties blijken te komen doordat de ster pulseert en daarbij dus uitzet en inkrimpt.

Leavitt

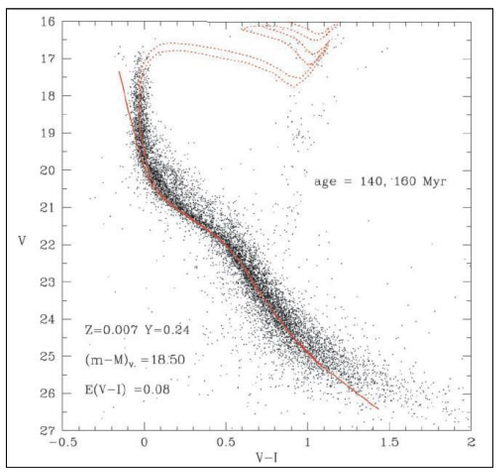
In 1912 onderzocht de astronome *Henrietta Leavitt* de Magellaense wolken en deed metingen aan 25 cepheïden die zij in deze wolken waarnam. Zij zag dat de cepheïden met de grootste schijnbare helderheden ook de langste periode hadden. Omdat alle cepheïden op dezelfde afstand stonden kon ze hieruit afleiden dat de periode afhankelijk was van de absolute helderheid van de ster (fig. 18). In deze figuur zie je nog twee typen variabele sterren die later ontdekt zijn.



Figuur 18: Het verband tussen helderheid en periode van cepheïden.

Astronomen hadden al snel in de gaten dat ze hiermee een nieuwe methode hadden gevonden om afstanden te bepalen in het heelal. Als je immers een cepheïde ziet en je meet zijn periode dan weet je direct zijn absolute helderheid en kun je dus met de afstandsvergelijking (vgl. 2) de afstand bepalen. Omdat cepheïden erg helder zijn kunnen deze ook waargenomen worden in ver weg gelegen sterrenstelsels en zo kunnen grote afstanden worden bepaald.

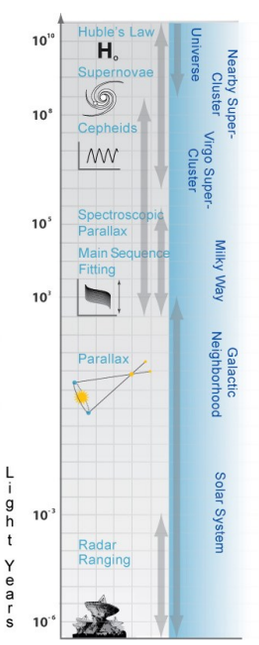
Figuur 19: Opname van de grote Magellaense wolk, zoals die op het zuidelijk halfrond te zien is.



Figuur 20: HR-diagram van de grote Magellaense wolk, met een schatting van de m-M (18.50), waarmee de afstand berekend kan worden.

Dit is de derde stap van de kosmische ladder waar afstanden tot zo'n 10^8 lichtjaar gemeten kunnen worden. (Zie ook de praktische opdracht op blz. 20).

6 De laatste stap van de kosmische ladder: De wet van Hubble



Figuur 21: De kosmische ladder voor het heelal.

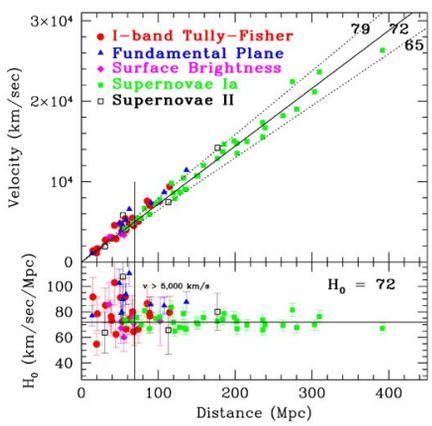
Edwin Hubble was een astronoom die in de jaren twintig van de vorige eeuw onderzoek deed naar sterrenstelsels die hij waarnam met telescopen. Hij deed metingen aan de spectra van deze sterrenstelsels en zag dat de spectraallijnen van alle sterrenstelsels verschoven waren in de richting van het rode licht. Hieruit concludeerde Hubble dat alle sterrenstelsels van elkaar af bewegen, wat te verklaren is doordat het heelal uitdijt. Hoe verder een stelsel van ons af staat des te sneller het lijkt te bewegen. De verschuiving naar rood licht komt doordat de lichtgolven die zijn uitgezonden door de sterrenstelsels langzaam uitgerekt worden, omdat ze mee uitdijen met de rest van het heelal. De mate waarin de golven uitgerekt zijn zegt iets over de afstand waarop de stelsels staan en de snelheid waarmee het stelsel van ons vandaan lijkt te bewegen. Uit onderzoek aan de lichtsterkte van supernova's (ontploffende sterren) kon men afstanden bepalen van sterrenstelsels tot ongeveer 10^9 lichtjaar. (Dit is nog een tussenliggende stap op de kosmische ladder die we hier niet verder behandelen.) Uit deze informatie en de snelheden die Hubble mat, leidde hij het volgende verband af voor snelheid en afstand (zie ook fig. 22):

$$v = H_0 d \qquad (7)$$

Waarin H_0 de Hubble constante is. Deze constante geeft aan in (km/s)/Mly wat de snelheid is in km/s die er voor iedere miljoen lichtjaar aan extra afstand bijkomt.

Een voorbeeld: een stelsel (M51) op 25 Mlj afstand (fig. 23) zal een snelheid hebben t.o.v. ons van 25 x H_0. De beste schatting van de Hubble constante op dit moment is 22,5±1,0 (km/s)/Mly. M51 zal dus een snelheid hebben van ongeveer 570 km/s.

Als we nu dus van zeer ver weg gelegen objecten de roodverschuiving meten, en daar de snelheid uit afleiden weten we ook gelijk de afstand tot het object. Het object met de grootste roodverschuiving tot nog toe blijkt een snelheid te hebben van 97% van de lichtsnelheid van ons vandaan. Dit komt overeen met een afstand van 13 miljard lichtjaar!



Figuur 22: Waarnemingen van afstanden waarmee de Hubble constante bepaald is. Duidelijk is te zien dat de constante ruim kan variëren, waardoor de leeftijd van het heelal zeer veel kan veranderen… Hier is dus nog een grote onzekerheid.

Uit de wet van Hubble is af te leiden hoe oud het heelal is met de volgende formule:

$$t = \frac{1}{H_0} \qquad (8)$$

Als we in de constante de afstand in km invullen dan krijgen we: H_0 = 22,5 (km/s)/ $9{,}5\cdot10^{18}$ km = $2{,}4\cdot10^{-18}$ s^{-1}. Dit betekent met de gegeven constante dat het heelal een leeftijd heeft van ongeveer $4{,}2\cdot10^{17}$s = $13{,}3\cdot10^{9}$ jaar. Met de onzekerheid erbij komen we op een schatting tussen de 12 en 14 miljard jaar.

De afstandsbepaling met behulp van de wet van Hubble voor zeer ver weg gelegen objecten noemen we de laatste stap van de kosmische ladder.

We zijn dus via de radarmetingen, de parallax, de spectroscopische parallax, de cepheïden en uiteindelijk de wet van Hubble zo bij de uiterste grenzen van het door ons waarneembare heelal gekomen.

Je ziet dus dat de nauwkeurigheid waarmee de leeftijd van het heelal en de afstanden bekend zijn niet zo heel hoog is. Er is een onzekerheid van zo'n 20%. Dit is echter niet zo vreemd als je bedenkt dat alle metingen iedere keer weer voortbouwen op metingen die eerder zijn verricht, waardoor de onzekerheid steeds groter wordt.

Opgave 5: LES verwerking: afstanden tot sterrenstelsels

Op de foto van fig. 23 is in de linkerbovenhoek (zie pijl) een heel lichtzwak sterrenstelsel (M=18) te zien. Metingen van de roodverschuiving laten zien dat dit stelsel een snelheid heeft van 0,16x de lichtsnelheid.

a Bereken de afstand tot dit stelsel in lichtjaren.

b Welke levensvormen waren op aarde aanwezig toen dit licht werd uitgezonden?

Figuur 23: Het sterrenstelsel M51, de draaikolknevel, gezien door een 8,0 cm telescoop. Dit stelsel staat op een afstand van 25 miljoen lichtjaar. Opname gemaakt op 03-05-2011 door A. van der Hoeven.

7 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we geleerd hoe we eigenschappen kunnen bepalen van sterren door middel van het licht dat we van deze sterren ontvangen. Met behulp van de lichtkracht en de temperatuur van sterren zijn we in staat om iets te zeggen over de grootte van sterren. Uit de spectra van sterren konden we meer te weten komen over temperatuur en samenstelling van sterren. Door het ordenen van lichtkracht en temperatuur in een HR-diagram kunnen we vervolgens afstanden bepalen van sterren alleen door te kijken naar het spectrum van deze sterren.

Door de ontdekking van veranderlijke sterren werden we in staat gesteld om ook afstanden tot sterrenstelsels te meten die vele malen verder weg zijn dan de sterren in ons eigen melkwegstelsel. Toen deze afstanden bekend waren zag Hubble dat alle stelsels met een grote snelheid van ons vandaan lijken te vliegen. Uit deze vluchtsnelheid leidde hij de Hubble-constante af die ons in staat stelt om zeer grote afstanden te bepalen en zelfs een schatting te maken van de leeftijd van het heelal.

Kanttekening hierbij is wel dat hoe verder we kijken hoe onnauwkeuriger de metingen worden omdat er steeds meer aannames in deze metingen verwerkt zijn. Daardoor is de marge op de grootste afstanden die we meten wel 30%.

Opgave 6: praktische opdracht: De afstand tot M100, een sterrenstelsel in de Virgo-cluster

Het sterrenstelsel M100 is een indrukwekkend spiraalstelsel in de grote Virgocluster wat qua vorm lijkt op het stelsel uit fig. 23. De Virgo cluster omvat 2.500 afzonderlijke stelsels.
M100 is één van de verste sterrenstelsels waarin nauwkeurige metingen aan cepheïden zijn gedaan. Deze opdracht is gebaseerd op opnamen en gegevens die verkregen zijn met de Hubble Space Telescope. Met deze gegevens gaan we de afstand tot M100 bepalen.

Het verband tussen lichtkracht en periode van cepheïden is sinds Henrietta Leavitts eerste metingen vele malen aangepast. De beste schatting voor deze relatie is op dit moment:

$$M = -2{,}78\log(p) - 1{,}35$$

Waarbij M de absolute magnitude en P de periode in dagen is.

Op bladzijde 21 zie je de lichtkrommen van de twaalf cepheïden die in M100 zijn waargenomen.

a Bereken, met behulp van de informatie in de lichtkrommen, de absolute helderheid M van de twaalf sterren.

b Om de afstand te bepalen hebben we ook de schijnbare helderheid nodig. Bedenk een methode, om met behulp van de lichtkrommen de schijnbare helderheid te bepalen.

c Bereken de schijnbare helderheid m en de afstand D (in Mpc) voor elk van deze cepheïden.

d Waarom vind je niet elke keer dezelfde afstand?

e Bepaal met behulp van deze 12 afstanden de afstand tot M100.

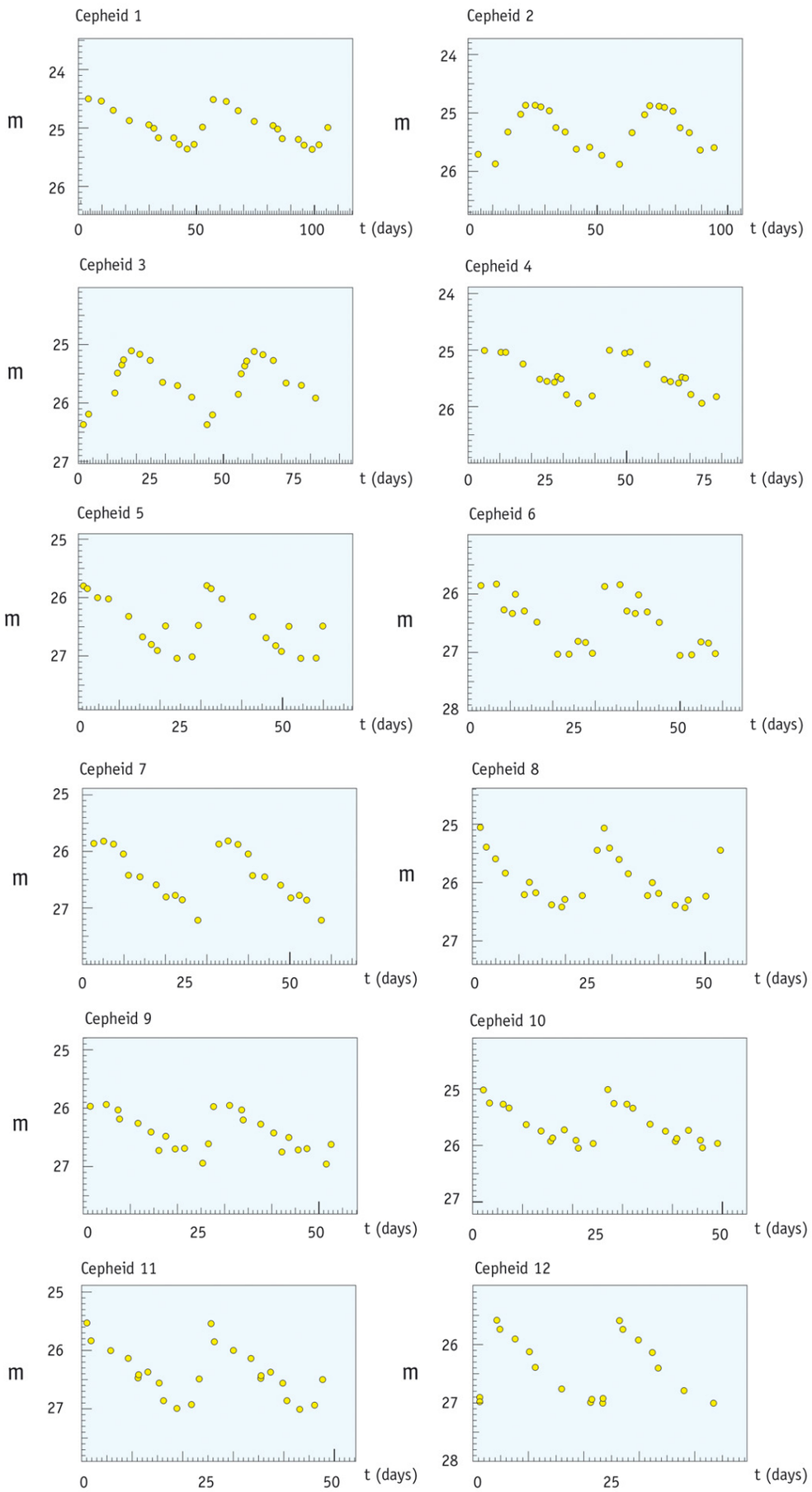
De afstand zoals die bepaald is is gelijk aan 17,2±1,8 Mpc (= $5{,}6\cdot10^7$ lichtjaar!). Bij de bepaling van deze afstand werd rekening gehouden met aanwezigheid van interstellair stof.

f Wat is de invloed van stof op je uitkomst?

De gemeten snelheid van dit stelsel t.o.v. ons melkwegstelsel is 1.400 km/s.

g Bereken met deze waarde de Hubble-constante in (km/s)/Mlj

h Bereken met deze constante de leeftijd van het heelal die uit deze metingen volgt.


Cepheid 1
m
24
25
26
0
50
100
t (days)
Cepheid 2
m
24
25
26
0
50
100
t (days)
Cepheid 3
m
25
26
27
0
25
50
75
t (days)
Cepheid 4
m
24
25
26
0
25
50
75
t (days)
Cepheid 5
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 6
m
26
27
28
0
25
50
t (days)
Cepheid 7
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 8
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 9
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 10
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 11
m
25
26
27
0
25
50
t (days)
Cepheid 12
m
26
27
28
0
25
t (days)

De structuur van sterren

1 Inleiding

Aan het oppervlak van de zon heeft het gas een temperatuur van ongeveer 6.000 ° C, daarom heeft de zon een geelachtige kleur. Er zijn ook hetere en koelere, helderder en zwakkere, grotere en kleinere sterren dan de zon. Dat blijkt voornamelijk te komen door hun verschillen in massa. De massa van de zon is $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg. Sommige sterren hebben veel meer massa dan de zon en andere minder. Sterren hebben massa's tussen de 0.1 en 100 $M_\odot$. De zon blijkt in alle opzichten een heel normale ster te zijn.

De zon en de aarde zijn al 4,6 miljard oud en uit onderzoek van fossielen weten we dat de helderheid van de zon al die tijd ongeveer hetzelfde is gebleven. Anders gezegd, de zon is heel stabiel, en hetzelfde geldt voor alle andere sterren: gedurende het overgrote deel van hun lange leven veranderen ze maar heel geleidelijk van temperatuur, straal en helderheid.

In dit hoofdstuk gaan we na hoe sterren zijn opgebouwd. Hoe komt het dat sterren zo lange tijd stabiel zijn en niet instorten of verdampen? Waar komt de energie vandaan die de sterren uitzenden? Hoe groot is hun energievoorraad? Hoe lang schijnen ze? Als we de energieproductie begrijpen, dan kunnen we met die kennis misschien ook begrijpen hoe sterren leven en sterven.

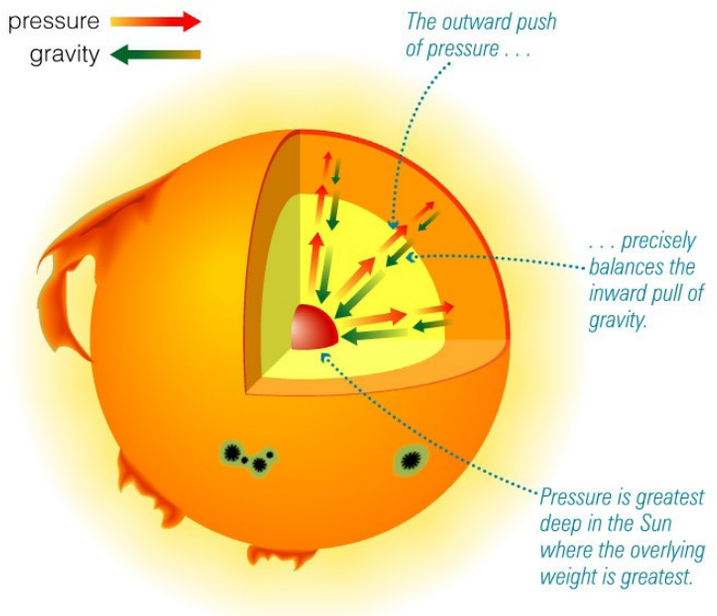
2 Sterren: gasbollen in evenwicht

Een ster is een gasbol die door zijn eigen zwaartekracht bijeen wordt gehouden. In het centrum van de ster wordt energie opgewekt die aan het oppervlak wordt uitgestraald. We weten dat sterren heel lang kunnen leven, miljoenen tot miljarden jaren, en dat ze het grootste deel van hun leven stabiel zijn.

Dat betekent dus dat er een evenwicht moet zijn tussen de gasdruk die de ster probeert te doen uitzetten en de aantrekking door de zwaartekracht, en een evenwicht tussen de hoeveelheid energie die wordt opgewekt en de hoeveelheid die wordt uitgestraald.

2.1 Hydrostatisch evenwicht

Als de aantrekking door de zwaartekracht zou winnen van de gasdruk, dan zou de ster inkrimpen, en in het uiterste geval zou de ster helemaal instorten. Anderzijds, als de gasdruk het zou winnen van de aantrekkingskracht door de zwaartekracht, dan zou de ster uitzetten en in het uiterste geval zou al het gas de ruimte in vliegen. De ster zou dan verdampen.



Figuur 1: In een ster zijn op alle punten de gasdruk en de zwaartekracht in evenwicht.

hydrostatisch evenwicht

Dit gebeurt duidelijk niet want sterren zijn heel stabiel. We moeten dus concluderen dat er in de sterren een evenwicht heerst tussen de aantrekking van de zwaartekracht en de uitzettingskracht door de gasdruk. Dat moet gelden op *alle dieptes* in de ster anders zouden ergens binnen in de ster nog lagen kunnen opzwellen of inkrimpen en dan zou de ster niet stabiel zijn. We noemen dit evenwicht tussen zwaartekracht en druk het **hydrostatisch evenwicht.** Hoe ontstaat dat evenwicht? Om dat te begrijpen bedenken we eerst hoe het zit met de aardatmosfeer. Die bestaat namelijk ook uit gas en is gemiddeld stabiel. (Er zijn natuurlijk wel horizontale winden en op warme dagen ook opstijgende gasbellen, z.g. thermiek, maar globaal blijft de atmosfeer ongeveer onveranderd).

We weten dat de druk en dichtheid in de aardatmosfeer naar boven toe afneemt, daarom hebben bergbeklimmers op de top van Mount Everest zuurstofmaskers nodig. Hoe komt het dat de dichtheid en de druk op zeeniveau hoger is dan op bergtoppen? Dat komt door de zwaartekracht: de lucht op zeeniveau moet het gewicht van de lagen daarboven dragen.

Zo zit het ook met de sterren. Aan de buitenrand van een ster, d.w.z. boven de atmosfeer van een ster, zijn de druk en dichtheid nagenoeg nul. Maar elke meter die je afdaalt in de ster voel je het gewicht van steeds meer bovenliggende lagen. De druk neemt dus toe naarmate je dieper in de ster komt. Dit zorgt voor een gasdruk die de bovenliggende lagen als het ware tegenhoudt. Aan de andere kant werkt de zwaartekracht in de richting van het centrum van de ster. Omdat de ster in evenwicht is, moet de zwaartekracht precies gecompenseerd worden door een even grote *naar buiten* gerichte kracht, geleverd door de gasdruk.

Als om de een of andere reden de druk in een laag in de ster te klein is compenseert deze niet de zwaartekracht van de bovenliggende lagen meer, waardoor de bovenste lagen iets omlaag zakken. Hierdoor stijgt de gasdruk

en wordt het evenwicht hersteld. Andersom als de gasdruk te hoog zou worden (bijv. door temperatuurstijging in de kern) zal de gasdruk groter zijn dan de zwaartekracht en worden de lagen iets naar buiten gedrukt (de ster zet uit), hierdoor daalt de gasdruk net zolang totdat er weer evenwicht is.

Opgave 1: De tijdsduur voor het herstel van hydrostatisch evenwicht.

Als een ster uit hydrostatisch evenwicht geraakt dan wordt de druk eventjes wat groter of kleiner dan als de ster in evenwicht is. Door drukverstoringen in een gas ontstaan dichtheidsgolven. Dichtheidsgolven zijn niets anders dan geluidsgolven. Het hydrostatisch evenwicht herstelt zich dan ook op een tijdschaal die ongeveer gelijk is aan de tijd die een geluidsgolf nodig heeft om door de hele ster te lopen, van centrum tot buitenrand. De geluidssnelheid in een ster is ongeveer $5{,}8 \cdot 10^6$ m/s. Zoek de de straal van de Zon en een heldere rode reus (Betelgeuze) op.

a Bereken die tijdschaal voor de zon en voor een heldere rode reus.

b Wat is je conclusie over de stabiliteit van deze sterren?

2.2 Energie-evenwicht

Sterren stralen. De energie in de kern wordt opgewekt door kernfusie. Hierbij fuseren lichtere atomen tot zwaardere atomen, waarbij energie vrijkomt. Als een ster in stabiel evenwicht is, dan moet er per seconde precies evenveel energie worden geproduceerd als er wordt uitgestraald.

Als de ster per seconde meer licht zou uitstralen dan er wordt opgewekt, dan zou de ster netto dus energie verliezen en afkoelen. Dan zou de gasdruk afnemen, de zwaartekracht zou winnen en de ster zou dan instorten. Anderzijds, als een ster meer energie zou produceren per seconde dan ze uitstraalt, dan zou de ster opwarmen. Als het gas heter wordt neemt de gasdruk toe en dus zou de ster uitzetten en niet stabiel zijn.

thermisch evenwicht

Voor een stabiele ster moet er dus **energie-evenwicht** zijn. Dit wordt soms ook **thermisch evenwicht** genoemd omdat het te maken heeft met de temperatuursverdeling in een ster.

stralingstransport

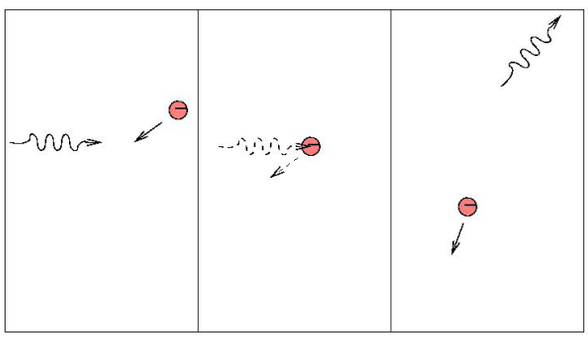
De energie die in het centrum van een ster door kernfusie wordt opgewekt moet naar buiten worden getransporteerd om uiteindelijk als straling door het oppervlak te worden uitgezonden. Dat energietransport kan op twee manieren: door fotonen, z.g. *stralingstransport* of door convectieve stromingen, *convectief transport*.

Stralingstransport Als de energie door de ster naar buiten wordt getransporteerd door fotonen dan gebeurt dat als volgt. In het centrum van de ster waar de kernfusie optreedt heerst een heel hoge temperatuur. De fotonen die daar worden gecreëerd hebben een hoge energie en zijn voor het merendeel röntgenfotonen.

Comptoneffect

Die röntgenfotonen dragen hun energie over aan het gas. Dat gebeurt voornamelijk door *botsingen met vrije elektronen*. Dit heet ook wel het **Comptoneffect**. Het gas in sterren is bijna helemaal geïoniseerd, dus er zijn geen gebonden elektronen meer en er is dus ook geen absorptie van fotonen door elektronen-overgangen mogelijk.

Elektronenverstrooiing werkt als volgt. Als een foton een vrij elektron ontmoet, dan gaat het elektron even trillen door het elektrisch veld van het foton. Daarbij gaat een klein deel van de energie van het foton over op het elektron. Het foton wordt daarbij afgebogen in zijn baan, het wordt "verstrooid", zie fig. 2. (Eigenlijk wordt het heel even geabsorbeerd en meteen weer ge-emitteerd maar nu in een willekeurige richting, en met iets minder energie.



Figuur 2: Verstrooiing van fotonen aan vrije elektronen.

Het elektron draagt de kinetische energie die het van het foton heeft gekregen over op het gas, door middel van botsingen met andere elektronen en met atoomkernen. Zo wordt het gas verhit door de energie die de fotonen verliezen.

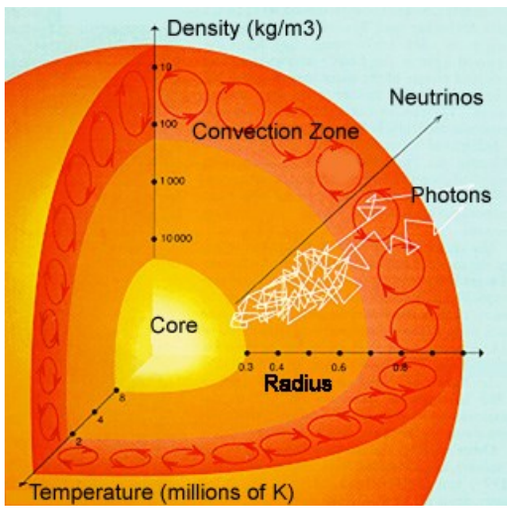
Het hete gas straalt die energie weer uit door uitzending van fotonen met een golflengte die bij zijn temperatuur past volgens de Planck-kromme. Deze uitgezonden fotonen worden ook weer verstrooid aan vrije elektronen en verhitten de lagen daarboven, enz.

Als je in een laag in de ster zou zitten dan komt straling van alle kanten op je af, links, rechts, boven, en onder. Maar de lagen boven je zijn iets koeler dan de lagen onder je. Je ziet dus méér straling van onderen komen dan van boven. Dus is er "netto" gezien stralingstransport naar boven.

We zien dus dat door de voortdurende verstrooiing van fotonen aan vrije elektronen de energie van de straling aan het gas wordt overgedragen, weer vrijkomt in de vorm van straling, die weer wordt verstrooid enz. Op die manier "lekt" de energie als het ware van het centrum van de ster naar hogere lagen.

Je kunt dit vergelijken met warmtegeleiding in een pannetje water op het vuur. De warmte die van onderen is toegevoegd geeft de moleculen een hoge kinetische energie (snelheid). Door botsingen met andere moleculen dragen ze dat over aan de moleculen van de lagen daarboven waardoor het water daar ook heter wordt, enz. Maar in dit geval gebeurt het "transport" van de energie door de bewegende moleculen als die kleine afstanden afleggen tussen twee botsingen.

Bij stralingstransport in sterren zijn het de fotonen die de energie transporteren door kleine afstanden af te leggen tussen twee verstrooiingen. Uiteindelijk bereikt de energie door het stralingstransport de rand van de ster.



Figuur 3: Energietransport in de zon: in het centrum wordt de energie opgewekt door kernfusie. De energie wordt door de ster getransporteerd door straling, maar in de buitenlagen door convectie. Ook zien we het verloop van druk, temperatuur en dichtheid van de atmosfeer tot het centrum.

Maar natuurlijk niet meer in de vorm van de röntgenfotonen die in het centrum zijn opgewekt. Op de reis naar boven is de energie van de fotonen steeds aangepast aan de lokale omstandigheden. De fotonen die uiteindelijk de ster verlaten hebben dus een energie die hoort bij de temperatuur aan de rand van de ster. Dat is de reden dat de zon voornamelijk geel licht uitzendt, behorend bij zijn oppervlaktetemperatuur van 5.700 K.

De randtemperatuur van de zon is $3{,}6 \cdot 10^{-4}$ keer zo laag als T in het centrum van de zon ($16 \cdot 10^{6}$ K), dus de uitgestraalde fotonen hebben een gemiddelde energie die $1{,}7 \cdot 10^{-4}$ keer zo laag is als die in het centrum. De energie van een oorspronkelijke foton is dus op zijn reis naar buiten verdeeld over gemiddeld 3.000 andere fotonen.

Convectief transport Daar waar het energietransport door middel van fotonen niet efficiënt genoeg is, bijvoorbeeld als sterlagen niet doorzichtig genoeg zijn, ontstaan convectieve stromingen die de energie transporteren in de vorm van warmte.

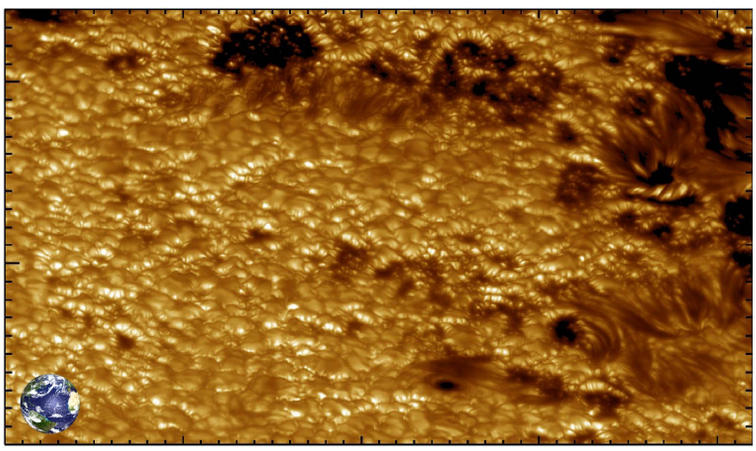
We kennen convectie ook van de aardatmosfeer. Op warme zomerdagen kan het aardoppervlak zo sterk verwarmd worden dat de warmtegeleiding van de lucht niet genoeg is om die warmte af te voeren. In de onderste luchtlagen gaan dan warme gasbellen opstijgen omdat warme lucht lichter is dan koelere lucht. De warme gasbellen stijgen van het oppervlak op en koelere gasbellen dalen en nemen hun plaats in tot ze op hun beurt ook weer verhit opstijgen. Zo ontstaat dan een circulatiepatroon dat de warmte naar boven transporteert. Dat geeft prachtige stapelwolken.

Hetzelfde kan ook gebeuren in sterren. Bij de zon bijvoorbeeld is de buitenlaag convectief tot een diepte van ongeveer 0.1 $R_\odot$ onder de zonsrand.[1] Dat komt omdat de buitenlagen van lichte sterren relatief koel zijn. Bij lagere temperaturen, ongeveer onder de 10^5 K, is de waterstof in een ster niet meer helemaal geïoniseerd maar wordt een groot deel van de

[1] *$R_\odot$, $L_\odot$ en $M_\odot$ worden gebruikt om de waarden van de zon aan te geven.*

elektronen gebonden aan H-kernen en vormt zo waterstofatomen in plaats van waterstofionen. Het blijkt dat waterstofatomen heel efficiënt fotonen kunnen absorberen, dus kan straling niet efficiënt door die lagen worden getransporteerd. Om de energie toch af te voeren ontstaan dan hete gasbellen die opstijgen en koelere bellen die dalen. Het zonne-oppervlak is dan ook een wirwar van stijgende en dalende gasbellen (zie fig. 4). Deze bellen noemen we ook wel *granulen*.

granulen



Figuur 4: Op het oppervlak zijn de borrelende gasbellen duidelijk te zien. Vergelijk ook de grootte van de aarde op de figuur. Bron: Zweedse 1 m telescoop op de Canarische eilanden.

Overigens, de borrelende lagen net onder het oppervlak van de zon zijn verantwoordelijk voor zonnevlekken, zonnevlammen en andere uitbarstingen aan het zonsoppervlak.

3 Kernfusie

Gedurende het grootste deel van het leven van sterren krijgen ze hun energie door kernfusie. Atoomkernen van een licht element smelten samen tot een kern van een zwaarder element. Daarbij wordt een heel kleine fractie van de massa omgezet in energie volgens de beroemde wet van Einstein $E = mc^2$, waarbij c de lichtsnelheid is en m het massa-defect, d.w.z. de massa die wordt omgezet in energie.

3.1 Voorwaarden voor kernfusie

Kernfusie kan alleen maar optreden in gas met een enorm hoge dichtheid en temperatuur. Deze zijn nodig omdat de kernen van atomen een positieve elektrische lading hebben. Het gas in sterren is namelijk geïoniseerd, dus de negatief geladen elektronen zijn van de atoomkern losgeraakt. Door hun positieve ladingen stoten de atoomkernen elkaar af. Ze kunnen dus alleen maar samensmelten als ze met zo'n grote snelheid op elkaar af vliegen dat ze de afstotende kracht overwinnen. Dit vereist een hoge temperatuur. Immers, hoe hoger de temperatuur, hoe groter de snelheid van de deeltjes. Bovendien moet de dichtheid erg groot zijn om te zorgen dat er genoeg botsingen optreden.

Dit vereist een hoge temperatuur. Immers, hoe hoger de temperatuur, hoe groter de snelheid van de deeltjes. Bovendien moet de dichtheid erg groot zijn om te zorgen dat er genoeg botsingen optreden. Laten we de zon beschouwen. In het centrum van de zon heerst een temperatuur van $T = 16 \cdot 10^6$ K en een dichtheid van $\rho = 1{,}6 \cdot 10^5$ kgm^{-3}. Dat is 1.600 maal zo groot als de dichtheid van water en toch is het door de hoge temperatuur nog gas! Die hoge temperatuur komt door de kernfusie en de hoge dichtheid komt door het gewicht van de bovenliggende lagen. Bij die grote dichtheid en hoge temperatuur botst een proton in het centrum van de zon ontelbare keren per seconde met een ander proton. Bij slechts een heel kleine fractie van al die botsingen treedt fusie op. Dat komt omdat voor H-fusie een botsingssnelheid van ca. 10^7 m.s^{-1} nodig is om de afstotende kracht te overwinnen, terwijl de *gemiddelde* snelheid van protonen slechts $4{,}5 \cdot 10^5$ m.s^{-1} is. Slechts een heel kleine fractie van de protonen, nl. die met de grootste snelheden, kunnen bij botsingen met andere snelle protonen fuseren.

3.2 Energieproductie door kernfusie

Atoomkernen bestaan uit protonen en neutronen. Het aantal protonen wordt aangeduid met Z en bepaalt de lading van de kern en met welk element we te maken hebben. Tezamen met het aantal neutronen (N) geeft dit het massagetal $A = Z + N$. Kernen met dezelfde Z maar een verschillend aantal neutronen heten isotopen van dat element. De aanduiding van een bepaald isotoop is als volgt: ${}^{A}\mathrm{X}$, waarbij X het element (en dus Z) aanduidt, en A het massagetal. Dus ${}^{1}\mathrm{H}$ is 'gewoon' waterstof met 1 proton, ${}^{2}\mathrm{H}$ is 'zwaar' waterstof (deuterium) met 1 proton en 1 neutron. Zie tabel 1 voor meer voorbeelden.

Protonen en neutronen hebben beiden een massa van ongeveer $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, de massa van een atoomkern is dus ongeveer Am_p. Ongeveer, maar niet precies! Het blijkt dat er een klein verschil is tussen de werkelijke massa van een atoomkern, en de som van de massa's van hun protonen en neutronen. Bij kernfusiereacties kan er dus een klein beetje massa verdwijnen; deze massa wordt omgezet in energie volgens de bekende formule uit Einstein's relativiteitstheorie: $E = mc^2$.

Dit is het principe van de energieproductie door kernreacties. Als het verschil in totale massa van de atoomkernen vóór en na een reactie Δm bedraagt, dan komt een hoeveelheid energie vrij van

$$E = \Delta m c^2 \qquad (1)$$

massadefect

Bij de fusie van H tot He smelten 4 protonen samen tot een He-kern volgens de volgende netto-reactie.

$$4\ {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + 2\ e^{+} + 2\nu + 2\gamma \qquad (2)$$

De twee positronen (e^+ = positief geladen elektron) die vrijkomen worden meteen samen met twee elektronen omgezet in energie.

De twee neutrino's (ν) hebben geen lading en bijna geen massa en vliegen dwars door de zon heen naar buiten.

De energie die vrijkomt, komt dus van de twee hoogenergetische fotonen, de γ-kwanten, en uit de annihilatie van de positronen.

element	isotoop	Z	A	massa
	e^-	-1	0	0.000549
	e^+	1	0	0.000549
	n	0	1	1.008665
waterstof	^1H	1	1	1.007276
	^2H	1	2	2.013553
helium	^3He	2	3	3.014932
	^4He	2	4	4.001506
lithium	^6Li	3	6	6.013477
	^7Li	3	7	7.014358
beryllium	^7Be	4	7	7.014736
	^8Be	4	8	8.003111
koolstof	^{12}C	6	12	11.996709
	^{13}C	6	13	13.000064
stikstof	^{13}N	7	13	13.001900
	^{14}N	7	14	13.999234
	^{15}N	7	15	14.996268
zuurstof	^{15}O	8	15	14.998681
	^{16}O	8	16	15.990526
neon	^{20}Ne	10	20	19.986955
magnesium	^{24}Mg	12	24	23.978460
silicium	^{28}Si	14	28	27.969250
ijzer	^{56}Fe	26	56	55.920677
nikkel	^{56}Ni	28	56	55.926779

Tabel 1: Een aantal elementen en hun isotopen. De laatste kolom geeft de werkelijke massa van de kern in eenheden van $m_u = 1{,}660538 \cdot 10^{-27}$ kg.

3.3 Waterstoffusie in meer detail

Uit de kernreactievergelijking 2 lijkt het of waterstof fuseert tot helium doordat er 4 protonen tegelijkertijd op elkaar botsen. Zo'n viervoudige botsing is (natuurlijk) erg onwaarschijnlijk en komt dan ook zelden voor. De kans is veel groter dat er meerdere botsingen en fusiereacties na elkaar plaatsvinden, en dat gebeurt dan ook in de praktijk.

pp-keten
CNO-cyclus

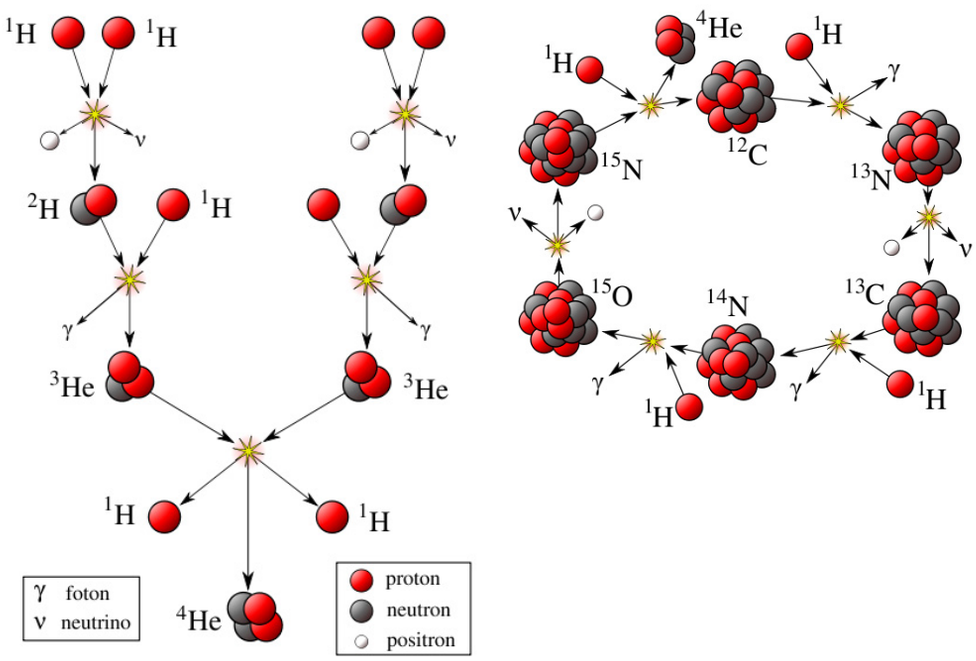
De fusie van waterstof tot helium $4\,^1H \rightarrow {}^4He$ vindt plaats via een serie reacties. Er zijn twee mogelijkheden, die de *pp-keten* en de *CNO-cyclus* worden genoemd. Ze staan weergegeven in figuur 5.

De pp-keten begint met de fusie van twee protonen tot deuterium (zwaar waterstof),

$$^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu$$

Hierbij wordt één proton omgezet in een neutron door middel van β^+-verval.

Bij dit proces komt een positron vrij (Dat de lading van het proton met zich meeneemt) en een neutrino. Het neutrino ontsnapt uit het sterregas en neemt een klein deel van de vrijgekomen energie mee. De rest van de energie gaat naar het positron, dat snel annihileert[2] met een elektron ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$) en zo gamma-fotonen vrijmaakt. De energie van deze fotonen wordt naar de rand van de ster getransporteerd (zie de uitleg over stralingstransport in paragraaf 2.2) en daar uitgestraald.



Figuur 5: Links: Fusie van waterstof tot helium (^{4}He) via de pp-keten. Rechts: Fusie van waterstof tot helium via de CNO-cyclus.

Deuterium reageert vervolgens onmiddellijk met een derde proton, waarbij wederom een gamma-foton vrijkomt en ^{3}He gevormd wordt. Dit reageert met een andere ^{3}He kern, gemaakt via dezelfde reacties, waarbij de bekende vorm van helium, ^{4}He, gevormd wordt en twee protonen vrijkomen.

De pp-keten is de belangrijkste energiebron in sterren met massa's zoals de zon of kleiner. Behalve de omzetting van ^{1}H in ^{4}He heeft de pp-keten twee bij-effecten: omdat de ^{2}H + ^{1}H reactie zeer snel verloopt, wordt alle in de ster aanwezige deuterium vernietigd. De ^{3}He + ^{3}He reactie is echter relatief langzaam, en in een schil rondom de sterkern ondergaat een deel van de ^{3}He niet de laatste reactiestap. Sterren met lage massa kunnen dus behalve ^{4}He ook ^{3}He produceren.

Als er in een ster al wat zwaardere elementen aanwezig zijn, is er een alternatief voor de pp-keten: waterstof kan fuseren met koolstof, zodat

$$^{12}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma \qquad (3)$$

De ^{13}N kern is onstabiel en ondergaat β^+-verval:

[2]Annihilatie is wanneer een deeltje met zijn anti-deeltje reageert waarbij de massa van de deeltjes verdwijnt en volledig omgezet wordt in energie volgens $E=mc^2$.

$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu$$

waarop ^{13}C reageert met nog twee protonen tot achtereenvolgens ^{14}N en ^{15}O, dat vervalt tot ^{15}N (zie fig. 5). Bij de reactie van ^{15}N met een proton wordt (meestal) geen ^{16}O gemaakt, maar $^{12}C + {}^{4}He$, waarmee we terug zijn bij het begin.

De ^{12}C-kern kan opnieuw dezelfde reacties ondergaan, vandaar dat dit de CNO-cyclus wordt genoemd. De koolstof fungeert slechts als katalysator van de netto-reactie $4\ {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He$.

De CNO-cyclus vergt een wat hogere temperatuur dan de pp-keten en is de voornaamste energiebron in sterren zwaarder dan de zon. Een belangrijk aspect van de CNO-cyclus zijn de zeer verschillende reactiesnelheden in de cyclus. Daarbij is de reactie

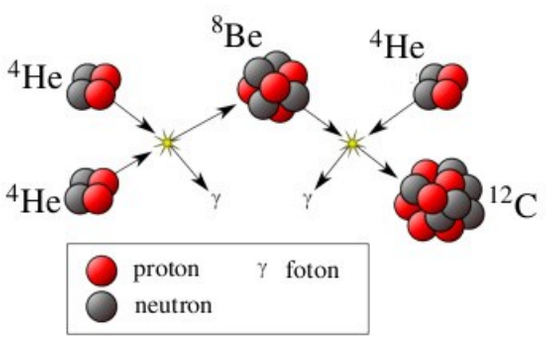
$$^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$$

verreweg de langzaamste, en fungeert daarmee als 'bottleneck': er ontstaat een opeenhoping van ^{14}N kernen op het circuit. Dit betekent dat, ondanks dat het totaal aantal C+N+O kernen niet verandert, er effectief ^{12}C wordt omgezet in ^{14}N. De CNO-cyclus speelt daarmee een belangrijke rol in de vorming van stikstof in het heelal.

3.4 Heliumfusie

Door waterstoffusie wordt het centrum van een ster (de binnenste 10% van de massa voor een ster als de zon, oplopend tot wel 40% voor hele zware sterren) geheel omgezet in helium. Er kan dan geen verdere waterstoffusie meer plaatsvinden. De energieproductie houdt dus op en het centrum van de ster trekt samen onder invloed van de zwaartekracht.

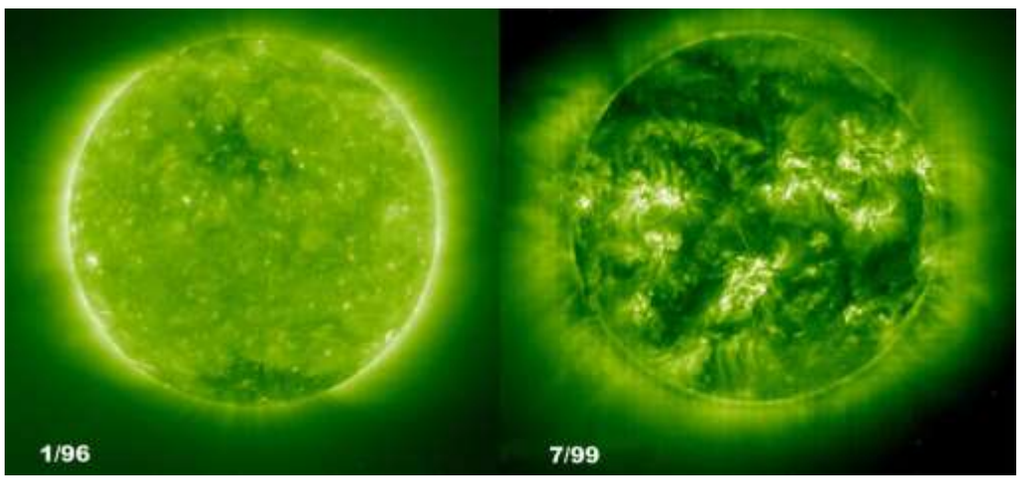
Net als bij de geboorte van de ster neemt de temperatuur in het stercentrum tijdens dit krimpen toe. Als het centrum zover is samengetrokken dat de temperatuur is opgelopen tot 10^8 K, begint de volgende fase: heliumfusie.



Figuur 6: Fusie van helium tot koolstof via de 3α-reactie.

In fig. 6 wordt het proces schematisch weergegeven. In de eerste stap fuseren twee Heliumkernen tot een ^{8}B-kern. Deze kern is instabiel en valt binnen 10^{-16} seconde weer uiteen in twee ^{4}He. Voor een succesvolle reactie moet de ^{8}B-kern dus binnen die tijd verder reageren met een derde ^{4}He-kern. Het resultaat is een stabiele koolstofkern: ^{12}C.

De twee reacties vinden zo snel achter elkaar plaats, dat de drie heliumkernen (α-deeltjes) eigenlijk tegelijk reageren. Vandaar de naam 3α-reactie. Als er genoeg ^{12}C is gemaakt, reageert een deel daarvan verder volgens $^{12}C + {}^{4}He \rightarrow {}^{16}O$. Het eindproduct van heliumfusie is dan ook een mengsel van koolstof en zuurstof.



Figuur 7: Ondanks dat de zon heel stabiel is zijn er wel variaties in de activiteit van de zon. Eén van de bekendste variaties is de 11-jarige zonnevlekcyclus. Hier zie je twee opnamen van de zon tijdens minimale en maximale activiteit.

4 De levensduur van sterren

Sterren krijgen hun energie uit kernfusie. Na verloop van tijd moet dat proces een keer ophouden, omdat de 'brandstof' op is. Hoe lang duurt dat? Daarover gaat deze paragraaf.

4.1 De levensduur van de zon

Met de kennis uit de vorige paragrafen over de H-fusie in de zon kun je uitrekenen hoe lang de zon kan stralen. Neem de totale hoeveelheid beschikbare waterstof, deel dat door de hoeveelheid die per seconde fuseert, en je weet hoe lang de zon te leven heeft. Je moet hierbij wel rekening houden met het feit dat kernfusie alleen maar in het centrum kan plaatsvinden, waar T en ρ hoog genoeg zijn.

De zon heeft een massa van $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg en bestond bij zijn ontstaan voor 70% uit H-gas. Uit nauwkeurige berekeningen van de opbouw van de zon blijkt dat slechts 12% van de totale zonsmassa in het centrum zit waar de H-fusie plaatsvindt. Hieruit volgt dat de zon in totaal 9 miljard jaar kan stralen met de huidige intensiteit. De zon is nu 4.6 miljard jaar oud, en dus ongeveer halverwege zijn leven! Dit houdt in dat in het centrum van de zon al de helft van de H is omgezet tot He.

Opgave 2: Levensduur van de zon

Gebruik de bovenstaande gegevens, de gegevens uit tabel 5.2 en het feit dat in de zon per seconde $4{,}0 \cdot 10^{9}$ kg waterstof in energie wordt omgezet om de levensduur van 9 miljard jaar na te rekenen.

Als alle H in het centrum van de zon is omgezet tot He, dan zijn er in principe nog andere fusiereacties mogelijk tot zwaardere elementen. De eerstvolgende reactie, heliumfusie, is al aan de orde gekomen in paragraaf 3.4. Tabel 2 geeft een overzicht van de belangrijkste achtereenvolgende reacties. Er zijn nog een groot aantal minder belangrijke tussenliggende stappen, waarbij o.a. ^{14}N en ^{40}Ca wordt gevormd, maar die zijn weggelaten.

reactie	T (K)	Massa-defect (%)	Duur[a] (jaar)
$4\ ^{1}H \rightarrow\ ^{4}He$	10^7	0,66%	10^7
$3\ ^{4}He \rightarrow\ ^{12}C$	10^8	0,065%	10^6
$^{12}C + ^{4}He \rightarrow\ ^{16}O$	$2\cdot 10^8$	0,048%	10^3
$2\ ^{16}O \rightarrow\ ^{28}Si + ^{4}He$	10^9	0,032%	1
$2\ ^{28}Si \rightarrow\ ^{56}Fe$	$2\cdot 10^9$	0,034%	10^{-2}

Tabel 2: De belangrijkste fusie-processen in sterren. [a] De duur geldt voor een ster van 15 $M_\odot$.

Tabel 2 toont een aantal interessante eigenschappen van de fusieprocessen in sterren.

(**1**) Voor elke volgende fusiereactie is een hogere temperatuur nodig. Dat komt omdat de betrokken atoomkernen een hogere lading hebben dus hun afstotende kracht is groter. Om dan toch te kunnen fuseren moeten de deeltjes met hogere snelheid op elkaar botsen, dus moet het gas een hogere *T* hebben.

(**2**) Bij elke volgende reactie (behalve de laatste) is het massadefect kleiner; er wordt een kleinere fractie van de massa omgezet in energie. Dus levert elke opvolgende reactie minder energie.

(**3**) Elke volgende fusiefase duurt veel korter dan de vorige. Dat is het gevolg van de eerste twee effecten. (a) Als reacties minder energie leveren kan de ster daar korter mee stralen. (b) De hogere *T* die nodig is voor elke volgende reactie wordt in een kleiner deel van het stercentrum bereikt, waardoor steeds een kleinere hoeveelheid materie kan fuseren. Daardoor neemt de duur van die fasen ook af. Bijvoorbeeld: niet alle He die is gevormd in het centrum van een ster wordt omgezet in C. Evenzo wordt slechts een deel van de gevormde C omgezet in O, enzovoorts.

We zien in tabel 2 dat alle fusie-processen na de H $\rightarrow$He fusie het leven van een ster maar met ongeveer 10% kunnen verlengen. Dat is voor alle sterren ongeveer hetzelfde: het grootste deel, ca 90 %, van haar leven krijgt een ster haar energie door de fusie van H.

In METEN AAN STERREN hebben we gezien dat ruwweg 90% van de sterren in het Hertzsprung-Russell diagram op de hoofdreeks zitten (zie fig. 10). Het blijkt dat alle sterren op de hoofdreeks bezig zijn met de fusie van H. De sterren die niet op de hoofdreeks zitten zijn met andere fusieprocessen bezig. Daar komen we later op terug als we de levensloop van sterren behandelen.

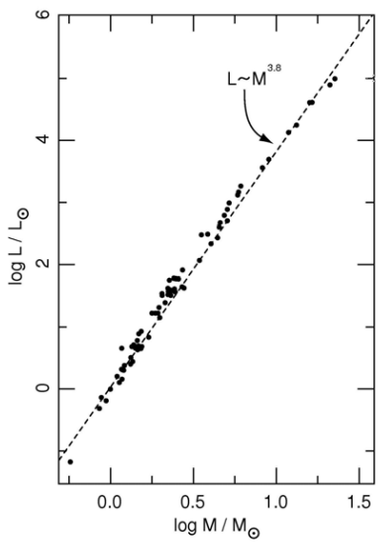
4.2 De levensduur van andere sterren

We hebben uitgerekend dat de zon ongeveer 10 miljard jaar oud kan worden, namelijk 9 miljard jaar tijdens de H-fusie en dan nog ruwweg 10% erbij. Hoe zit dat met andere sterren?

Sterren die meer massa hebben dan de zon blijken helderder te stralen. Dat komt omdat de druk en de dichtheid in het centrum des te groter is naarmate de ster zwaarder is. Bij die grotere druk en dichtheid verloopt het fusieproces efficiënter en wordt er meer energie geproduceerd, dus de ster is helderder.

Uit metingen van de massa van sterren en hun helderheid weten we dat er voor hoofdreekssterren een relatie is tussen massa en lichtkracht (zie fig. 8):

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,8} \qquad (5)$$



Figuur 8: De gemeten massalichtkrachtrelatie voor hoofdreekssterren.

Dit betekent dat een ster met een massa van $2M_\odot$ een helderheid heeft van $L = 2^{3,8}L_\odot = 14L_\odot$, en anderzijds een ster van $0{,}5M_\odot$ een helderheid heeft van $L = 0{,}07L_\odot$ en dus veel zwakker is dan de zon.

Met deze gegevens kunnen we dus van hoofdreekssterren direct de massa schatten, want de lichtkracht is immers bekend uit het HR-diagram! Het blijkt dan dat de blauwe (dus hete) hoofdreekssterren de grootste massa hebben en de rode (koele) hoofdreekssterren de kleinste massa.

Ook gebruiken we deze eigenschap om de levensduur van sterren te schatten. Het idee is dat een ster die meer massa heeft dan de zon meer waterstof heeft om te fuseren en dus in totaal meer energie kan produceren en dus langer zou kunnen leven, maar als zij helderder is dan de zon dan jaagt zij die energie er sneller doorheen en dat zal de levensduur juist weer verkorten. Kortweg:

$$\text{Levensduur t.o.v. de zon} = \frac{\text{energievoorraad (=massa) t.o.v. de zon}}{\text{verbruik t.o.v. de zon}}$$

Ofwel

$$t_{max} = 10^{10}\,\frac{M_*/M_\odot}{L_*/L_\odot}\,jaar, \qquad (6)$$

Waarbij 10^{10} jaar de levensduur van de zon is.

Met deze simpele methode onderschat je de levensduur van sterren zwaarder dan $20M_\odot$. Dat komt omdat door hun grote massa een groter deel van de ster voldoende hoge T en ρ heeft voor fusie. Bij de zon kan ongeveer 12% van de massa meedoen aan de H-fusie, bij een ster van $20M_\odot$ is dat echter ongeveer 25%. Daardoor is de levensduur van zware sterren hoger dan je zou schatten met vergelijking 7. Nauwkeurige berekeningen van sterevolutie laten zien dat de maximale leeftijd van een ster van $20M_\odot$ zo'n t_{max} = 9 miljoen jaar is, en die van een ster van $50M_\odot$ nog t_{max}= 4 miljoen jaar. We zien aan de resultaten dat hoe meer massa een ster heeft, des te korter zal zij leven! Alle zware en heldere sterren die we aan de hemel vinden zijn dus relatief recent ontstaan. Voorbeeld: de drie sterren van de gordel van het sterrenbeeld Orion hebben allen een massa van meer dan $25M_\odot$. Die sterren zijn dus minder dan 5 miljoen jaar geleden geboren. Dat is kosmisch gezien heel jong!

Opgave 3: De levensduur van sterren

Schat de levensduur van de sterren in onderstaande tabel, gebruikmakend van de *M*-*L*-relatie van fig. 8.

Massa $M/M_\odot$	Helderheid $L/L_\odot$	Levensduur jaren
0.5		
0.8		
1		
3		
5		
20		
50		

Het heelal is ongeveer 14 miljard jaar oud. Wat betekent dat voor alle sterren die ooit geboren zijn met een massa kleiner dan 0,8 *M*?

4.3 Leeftijdsbepaling van sterren in sterrenhopen

We kennen de leeftijd van de zon omdat we uit metingen van radioactief gesteente op aarde en op de maan de leeftijd van de aarde en de maan kunnen meten. Die blijken ongeveer 4,6 miljard jaar oud te zijn. Uit onderzoek naar de vorming van planeten blijkt dat die vrijwel tegelijk met de zon ontstaan zijn, dus moet de leeftijd van de zon ook 4,6 miljard jaar zijn.

Helaas kunnen we deze methode niet toepassen om de leeftijd van andere sterren te bepalen. Zelfs als er om die sterren planeten zouden draaien kunnen we daar immers geen bodemmonsters van nemen! Daarom kunnen we de leeftijd van losse sterren niet rechtstreeks bepalen.

Gelukkig kunnen we wel de leeftijden van *sterrenhopen* bepalen, omdat we weten dat de sterren van een sterhoop allemaal ongeveer tegelijk zijn geboren uit dezelfde moleculaire reuzenwolk.

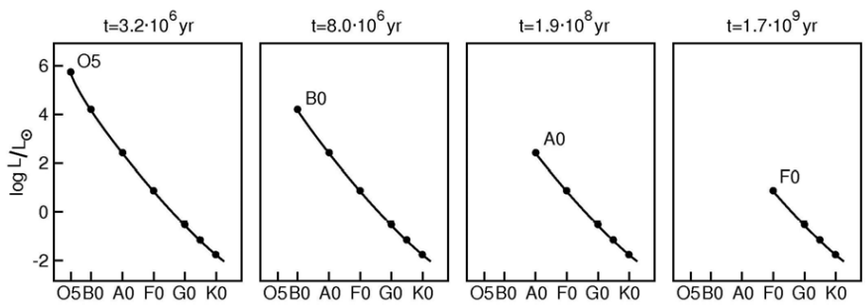
Voor die leeftijdsbepaling gebruiken we de berekeningen van de levensduur van sterren van verschillende massa's en helderheden die we hierboven hebben afgeleid. Omdat alle sterren in een sterhoop tegelijk ontstaan zijn, kennen we de leeftijd van alle sterren van die sterhoop als we de leeftijd van de sterhoop als geheel weten.

Sterrenhopen bevatten bij hun geboorte sterren van allerhande massa's, van de zwaarste (ongeveer $100M_\odot$) tot de lichtste (ongeveer $0.1M_\odot$). In het begin zijn al die sterren bezig met H-fusie. Als we de helderheid van die sterren meten en hun kleur of oppervlaktetemperatuur en dat in een grafiek tegen elkaar uitzetten, dan hebben we het Hertzsprung-Russell diagram (afgekort HR-diagram) van die sterhoop (zie fig. 10 in METEN AAN STERREN).

Alle jonge sterren van een sterhoop die met H-fusie bezig zijn liggen op de hoofdreeks; de zwaarste sterren bovenaan en de lichtste sterren onderaan. Maar wat gebeurt er nu als de sterhoop ouder wordt?

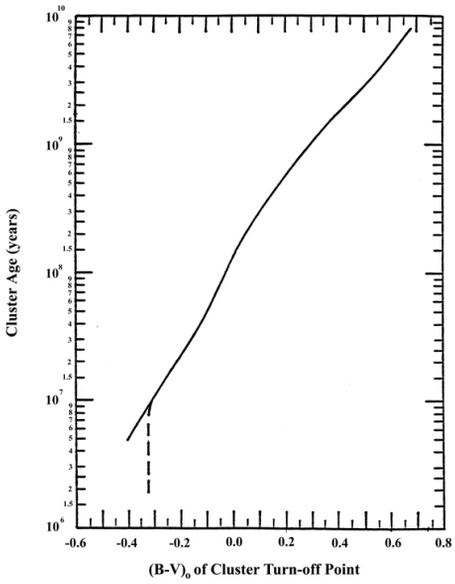
De zwaarste sterren hebben de kortste levensduur, dus die zijn het eerst klaar met de H-fusie en liggen in het HR-diagram dan niet meer op de hoofdreeks. Naarmate de sterhoop ouder wordt verlaten steeds meer sterren de hoofdreeks. Het punt waar de knik in de hoofdreeks zichtbaar is noemen we het *turn-off point*. De hoofdreeks wordt dus van de bovenkant af steeds korter. Hoe korter de hoofdreeks, hoe ouder de sterhoop. Dus we kunnen de leeftijd van een sterhoop meten door te kijken hoever de hoofdreeks zich naar boven uitstrekt! Dit is geschetst in fig. 9.

turn-off point

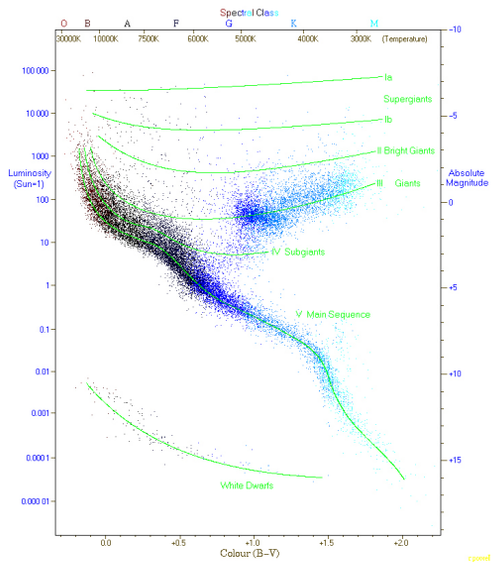


Figuur 9: Schematische tekening van de verandering in de hoofdreeks van een sterhoop als de sterhoop steeds ouder wordt. Het spectraaltype van de zwaarste ster op de hoofdreeks is gegeven.

Als de zwaarste en helderste hoofdreeksster van een sterhoop een massa heeft van $20M_\odot$, dan zijn alle sterren zwaarder dan $20M_\odot$ dus al weg, maar die van $20M_\odot$ nog net niet. De hoofdreeksfase van een ster van $20M_\odot$ duurt 8 miljoen jaar, dus de sterhoop is net iets jonger dan 8 miljoen jaar. Er zijn ook sterrenhopen waarvan de hoofdreeks zo kort is dat de zwaarste sterren op de hoofdreeks een massa van slechts $0.9M_\odot$ hebben. Dat zijn de bolvormige sterrenhopen, die ongeveer 12 miljard jaar oud zijn.



Figuur 10: De leeftijd van sterrenhopen uitgezet tegen de B-V index van het turn-off point van de hoofdreeks.

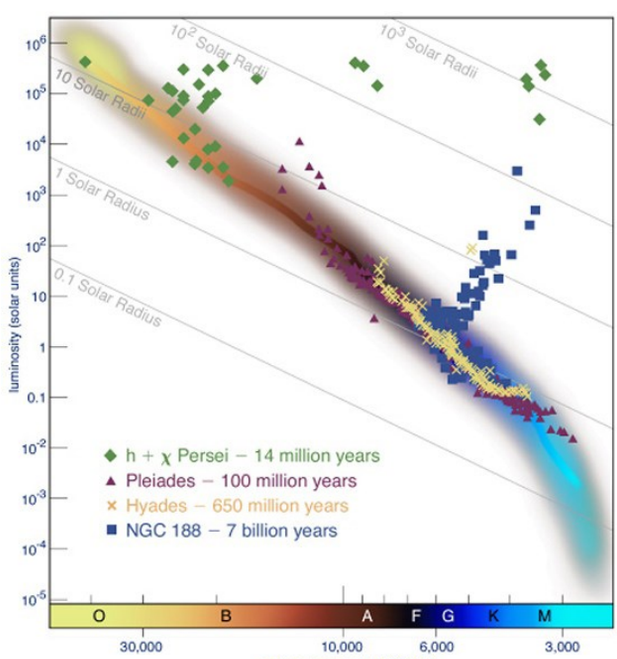


Figuur 11: Lichtsterkte uitgezet tegen B-V index.

Opgave 4: De leeftijd van een sterhoop

Gebruik figuur 10 om de leeftijd te bepalen van de volgende drie sterrenhopen:

- de Pleiaden (helderste hoofdreeksster: L = 1.400$L_\odot$)
- de Hyaden (helderste hoofdreeksster: L = 50$L_\odot$)
- de bolhoop M13 (helderste hoofdreeksster: L = 0,7$L_\odot$).

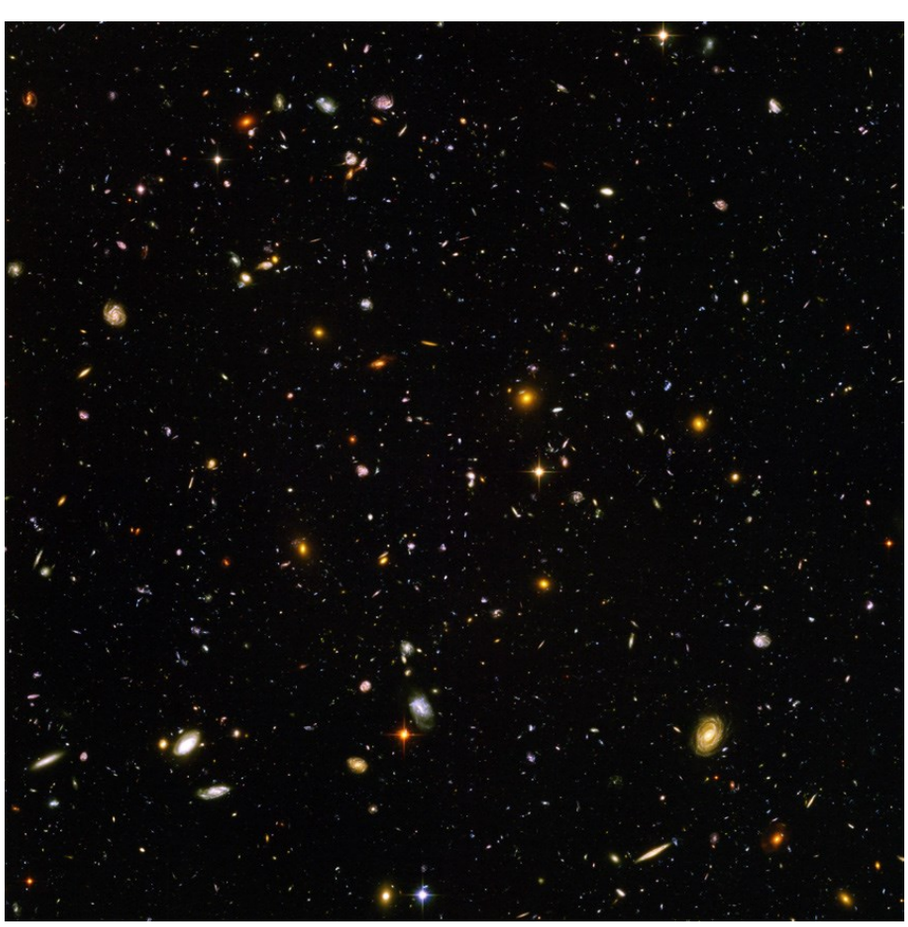


Figuur 12: De HR-diagrammen van verschillende sterrenhopen. Duidelijk is te zien hoe de hoofdreeks korter wordt als de sterhoop ouder is.

5 Conclusie

In dit hoofdstuk heb je gezien dat sterren bestaan uit gas. Binnen deze sterren is een voortdurende strijd tussen de zwaartekracht en de gasdruk, die er samen voor zorgen dat de ster stabiel blijft. In het hart van de ster vindt kernfusie plaats. Hierbij smelten lichte atomen samen tot zwaardere atomen, waarbij een deel van de massa wordt omgezet in energie. Bij lichte sterren bestaat deze fusie uit de fusie van waterstof tot helium volgens de pp-keten. Bij zwaardere sterren kan dit ook gebeuren via de CNO-cyclus. Als de fusie van waterstof in de kern klaar is (alle waterstof is op) krimpt de ster verder ineen waardoor de temperatuur in de kern stijgt en er fusie kan plaatsvinden van helium naar koolstof en zuurstof. Bij nog zwaardere sterren kunnen er nog andere fusieprocessen plaatsvinden, die echter steeds korter energie opleveren doordat er steeds minder brandstof beschikbaar is.

De levensduur van sterren kun je schatten door hun massa t.o.v. de zon te vergelijken met de lichtkracht t.o.v. de zon. Het blijkt dan dat zware sterren een kortere levensduur hebben dan lichte sterren. In sterrenhopen, waar alle sterren min of meer tegelijk zijn ontstaan, kun je met behulp van het HR-diagram zien wat de zwaarste sterren zijn die zich nog op de hoofdreeks bevinden. Dit zegt iets over de leeftijd van zo'n sterhoop, omdat je met de levensduur dan kunt zien hoe oud deze sterren zijn.



Figuur 13: Ultra Deep field opname van de Hubble Space telescoop. Hier zien we een stukje hemel ter grootte van 1/10 van de volle maan. Elke stip is een sterrenstelsel vergelijkbaar met ons eigen melkwegstelsel. We zien hier stelsels tot een afstand van zo'n 13 miljard lichtjaar. Deze opname geeft een goed beeld hoe reusachtig het heelal is.

De levensloop van sterren

1 Inleiding

Sterren leven niet eeuwig. Ze ontstaan, leven een tijd en sterven dan. Sterren worden geboren uit grote gaswolken die in de ruimte zweven. Hoewel die gaswolken naar aardse begrippen uiterst ijl zijn, bevatten ze door hun enorme afmeting van vele lichtjaren toch genoeg materie om daaruit honderden tot vele duizenden sterren te vormen. De massa van die wolken verandert steeds doordat er gas uit de interstellaire ruimte bij komt of af gaat. De zwaarste wolken vangen meer massa dan ze verliezen.

Als de massa van een wolk groot genoeg wordt dan gaat hij onder invloed van zijn eigen zwaartekracht samentrekken. Bij dat samentrekken gaat de wolk fragmenteren en die fragmenten trekken dan weer samen en worden uiteindelijk sterren. Zo worden sterren geboren in sterhopen. Sterhopen vallen in de loop van de tijd uiteen in losse sterren.

Sterren stralen. Dat betekent dat ze energie verliezen. Die energie krijgen ze voornamelijk door fusieprocessen die zich diep in hun centrum afspelen. Door die fusieprocessen verandert geleidelijk aan de chemische samenstelling in het gebied waar de fusie optreedt. Met achtereenvolgende fusieprocessen kunnen sterren heel lang stralen, maar uiteindelijk stopt de fusie. Dan heeft de ster geen energiebron meer en komt aan haar einde.

Lichte sterren komen anders aan hun einde dan zware sterren. Lichte sterren, zoals de zon, blazen tegen het eind van hun leven de buitenlagen de ruimte in. Wat overblijft is een prachtige min-of-meer ronde nevel met in het midden de overgebleven pit van de ster. Zo'n pit is een heel compacte ster, een zogenaamde witte dwerg.

Zware sterren eindigen hun leven in een enorme supernova-explosie. Daarbij wordt bijna al het gas van de ster met zeer grote snelheid van meer dan 10.000 km/s de ruimte in geslingerd. Ook hier blijft de pit van de ster over. Maar in dit geval is de pit nog veel compacter dan een witte dwerg: het is een neutronenster of een zwart gat.

In dit hoofdstuk bespreken we hoe sterren worden gevormd uit gaswolken. Daarna behandelen we de levensloop van sterren.

Figuur 1: De Pelikaannevel: een zware interstellaire gaswolk op een afstand van 1.900±20 lichtjaar met een diameter van 130 lichtjaar en een totale gasmassa van 105 $M_\odot$. Deze nevel is een gedeelte van een veel grotere wolk samen met de Noord-Amerika nevel. In dit soort zware nevels worden sterren gevormd.

2 Het ontstaan van sterren

interstellair gas

De ruimte tussen de sterren is gevuld met een zeer ijl gas, het zogenaamde interstellaire gas. Dat gas is zo ijl dat de gemiddelde dichtheid slechts 1 atoom per cm^3 is.

Het interstellaire gas is niet erg homogeen: er zijn ook interstellaire wolken. Die hebben dichtheden van tientallen tot honderd atomen per cm^3 en afmetingen van enkele tot tientallen lichtjaren. De temperatuur van die wolken is 103 à 104 K. De wolken met een T van ongeveer 104 K zenden zoveel straling uit dat we ze zien als ijle lichtende nevels aan de hemel, dit zijn emissienevels. Het bestaan van de koudere wolken kunnen we alleen afleiden omdat ze in het spectrum van daarachter gelegen sterren absorptielijnen veroorzaken, dit noemen we absorptienevels. De interstellaire wolken in ons melkwegstelsel hebben allemaal ongeveer dezelfde chemische samenstelling (zie tabel 1). Kennelijk is het interstellaire gas goed gemengd.

Er zijn echter ook uitschieters, dat zijn de zogenaamde moleculaire reuzenwolken. Hun naam zegt het al: ze zijn enorm groot, tot 100 lichtjaar. Ze hebben dichtheden tot 104 à 106 atomen per cm^3 en bevatten 104 à 107 $M_\odot$ aan gas. Bovendien hebben ze een heel lage temperatuur van slechts ca. 10 K. Bij die dichtheden en die lage temperatuur gaan de atomen zich binden tot moleculen. Vandaar moleculaire wolken.

Moleculaire reuzenwolken worden bijeen gehouden door hun eigen zwaartekracht die zich verzet tegen de neiging van het gas om weg te vliegen door de gasdruk. Omdat het interstellaire gas steeds in beweging is en

Waterstof	H	70 %
Helium	He	28 %
Zuurstof	O	1%
Koolstof	C	0.4 %
Stikstof	N	0.1 %
Rest		0.5 %

Tabel 1: De chemische samenstelling van interstellaire wolken uitgedrukt in gewichtspercentages.

interstellaire wolken met elkaar botsen, kan de massa van een moleculaire reuzenwolk geleidelijk toenemen. Naarmate zo'n wolk zwaarder wordt neemt de interne aantrekking door de eigen zwaartekracht toe. Als de wolk zo zwaar geworden is dat de zwaartekracht het wint van de uitwaartse kracht door de gasdruk, dan gaat de wolk samentrekken. Eerst gaat dat langzaam, op een tijdschaal van een paar miljoen jaar, maar in de loop van de tijd gaat het steeds sneller. In fig. 1 zie je zo'n gaswolk waarin stervorming plaatsvindt.

Opgave 1: Moleculaire reuzenwolken

We bekijken een interstellaire wolk met een straal van 100 lichtjaar, met een dichtheid van 10^4 atomen/cm^3.

a Hoeveel atomen bevat die wolk?

Volgens tabel 1 bestaat 70% van de massa van de wolk uit H-atomen en 28% uit He-atomen.

b Laat zien dat dan ongeveer 90% van de atomen in de wolk H-atomen zijn.

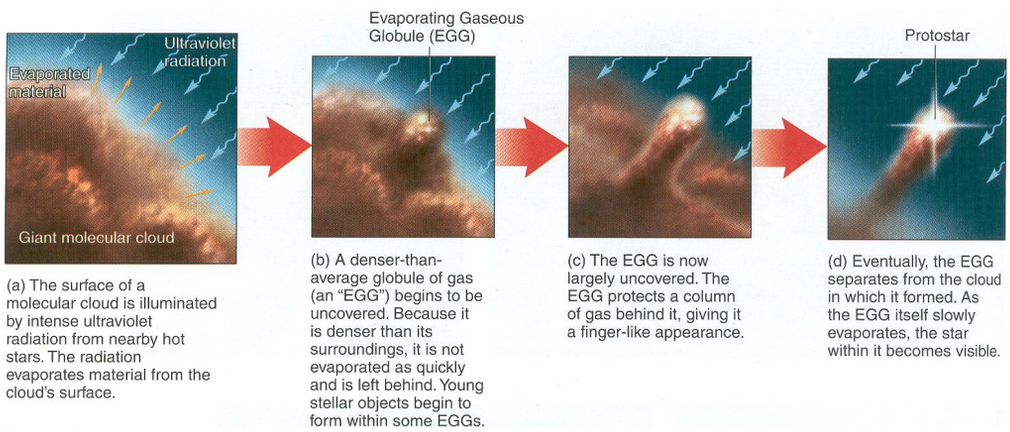
c Hoe zwaar is de wolk (ongeveer)?

d Waarom is H_2 het meest voorkomende molecuul in moleculaire reuzenwolken?

Door het samentrekken neemt de dichtheid van de wolk toe. Om een reden die we niet goed begrijpen, maar waarbij magneetvelden waarschijnlijk een rol spelen, gaat de krimpende wolk fragmenteren in kleinere subwolken die elk op hun beurt ook weer samentrekken. Dit fragmentatieproces gaat zover door tot de sub-wolken een massa hebben van ruwweg 0.1 à 100 $M_\odot$. Die "kleine" fragmenten trekken ook weer samen door hun eigen zwaartekracht en dat worden uiteindelijk sterren. Hoe groter het fragment des te sneller de ster tot ontbranding komt doordat de druk in de kern sneller toeneemt. In fig. 3 zie je hoe sterren van verschillende massa's zich door de protoster fase naar de hoofdreeks bewegen. Wanneer de eerste sterren ontbranden wordt door de straling van de sterren het gas in de wolk weggeblazen.

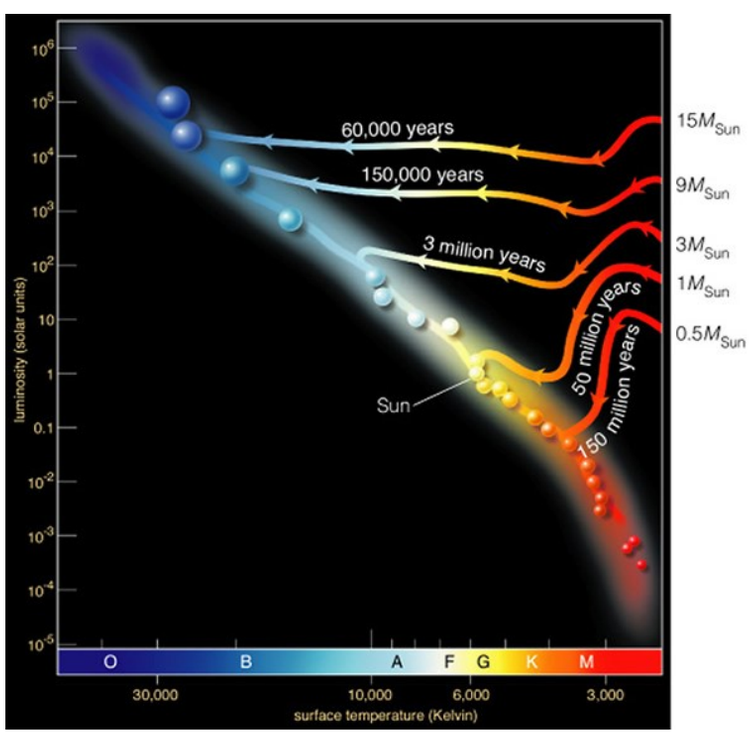
protosterren

Alleen kleine wolkjes met een hogere dichtheid (sterren in vorming) zijn bestand tegen deze druk en blijven bestaan. Ook de gassen achter deze *protosterren* zijn beschermd en er ontstaan vingerachtige structuren in de wolk met daarin sterren die aan het ontstaan zijn (zie fig. 2 en het midden van



Figuur 2: Ontstaan van pilaarvormige structuren

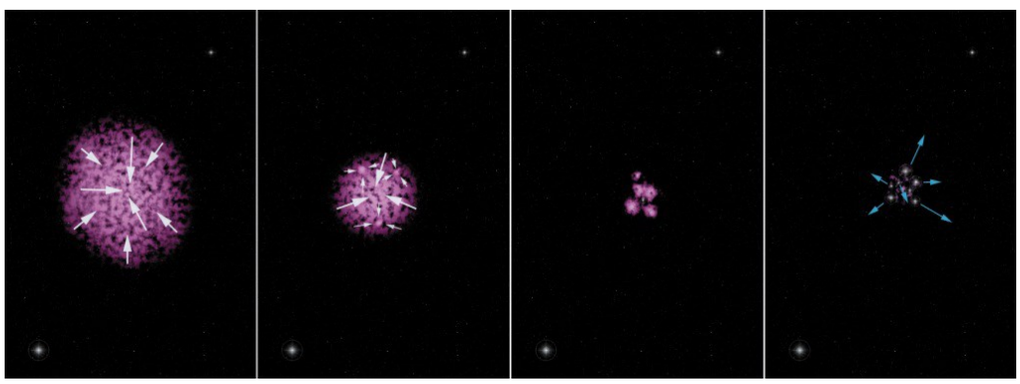
fig. 1). Zo ontstaat uit een grote interstellaire wolk een sterhoop. Die kan honderden tot miljoenen sterren bevatten, die dus allemaal ongeveer even oud zijn.



Figuur 3: Het verloop van het ontstaan van een protoster weergegeven in een HR diagram voor verschillende stermassa's.

De sterren in een sterhoop blijven niet altijd bij elkaar. Door storende invloed van zijn omgeving, bijvoorbeeld ontmoetingen met andere

sterhopen of de passages van moleculaire reuzenwolken kunnen sterhopen op heel lange tijdschaal uiteenvallen. De leden van de sterhoop worden dan losse sterren, net zoals de zon. De zon is ook ooit in een sterhoop geboren, maar die is in de loop van de tijd uiteen gevallen in losse sterren. Sterhopen van 100 tot 1.000 sterren vallen uiteen binnen tien tot honderd miljoen jaar. De zwaarste sterhopen van honderdduizenden sterren doen er meer dan 10 miljard jaar over. Het proces van de vorming van een sterhoop uit een samentrekkende wolk is geschetst in figuur 4.



Figuur 4: Schets van de vorming van sterren in een sterhoop uit een grote interstellaire wolk. De wolk trekt samen door zijn eigen zwaartekracht en fragmenteert daarbij in steeds kleinere subwolken. Die subwolken trekken ook samen en worden uiteindelijk sterren. Zo ontstaat uit een moleculaire reuzenwolk een sterhoop. Veel later, na miljarden jaren, valt een sterhoop langzaam uiteen en gaat over in losse sterren.

3 De levensloop van de zon en andere lichte sterren met M< 8 $M_\odot$

In deze paragraaf beschrijven we de evolutie van de zon. De evolutie van alle sterren met een massa $M < 8M_\odot$ verloopt ongeveer op dezelfde wijze als die van de zon, alleen in een ander tempo zoals we in paragraaf 4.2 van DE STRUCTUUR VAN STERREN hebben laten zien. Immers, hoe zwaarder een ster is, des te sneller verloopt haar evolutie.

3.1 De hoofdreeksfase

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat van de verschillende fusie-processen die van waterstof de meeste energie oplevert, en dat dus de fase waarin de ster haar energie uit H-fusie krijgt het langst duurt.

Als de ster H tot He fuseert dan is de structuur van de ster zodanig dat zij in het Hertzsprung-Russell diagram op de hoofdreeks zit. Zware sterren zijn het helderst en zitten hoog op de hoofdreeks, lichtere sterren zijn zwakker en zitten lager op de hoofdreeks. Omdat sterren het grootste deel van hun leven bezig zijn met waterstoffusie zitten in elk HR-diagram de meeste sterren op de hoofdreeks.

Gedurende de hoofdreeksfase, die voor de zon ongeveer 9 miljard jaar duurt, neemt in het centrum langzaam het H-gehalte af en stijgt het He-gehalte. Daarbij veranderen de straal, de helderheid en de oppervlaktetemperatuur nauwelijks (minder dan 20%). Daardoor blijft de ster bijna op dezelfde plaats op de hoofdreeks van het HR-diagram. De zon is nu, 4.6 miljard jaar na zijn ontstaan, halverwege zijn hoofdreeksfase. In het centrum van de zon is dus al de helft van alle H omgezet in He.

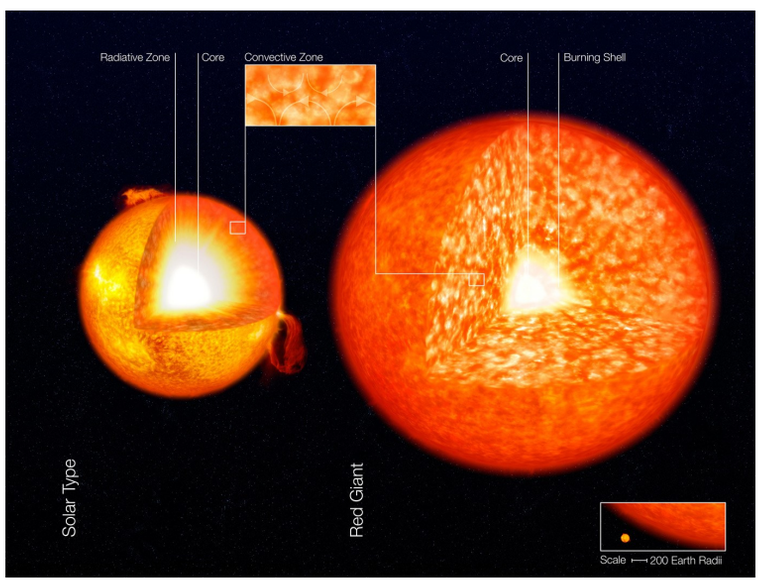
3.2 De rode-reusfase: het begin van het einde

Als in het centrum van de zon de waterstof op is en de fusie dreigt te stoppen, gaat de zwaartekracht het (tijdelijk) winnen, want minder fusie betekent lagere T en p, dus een kleinere kracht naar buiten. Het centrum van de ster, en de lagen er direct omheen, worden dan ineengedrukt. Als gas wordt samengedrukt loopt de temperatuur op. De lagen net buiten het centrum worden door de samendrukking zo heet dat daar H-fusie op gang komt.

De zon heeft dan dus een “pit” van He-gas, met daar omheen een laag waar H → He gefuseerd wordt en daar omheen zitten dan de lagen waar nog geen fusie heeft plaatsgevonden en die dus nog voornamelijk uit H bestaan. Het blijkt dat die lagen dan sterk convectief gaan worden. Deze heel dikke convectielaag, waarin het gas “borrelt”, wordt de convectieve “mantel” van de ster genoemd.

Door dat borrelen zullen de buitenlagen van de zon zo sterk opzwellen dat de zon veel groter wordt dan nu het geval is: de straal neemt toe tot ongeveer 10 à 50 R_0 en de oppervlaktetemperatuur daalt daarbij tot ca 3.000 K. De zon is dan een rode reus geworden. Zie figuur 5. De rode-reusfase van de zon duurt ongeveer 10^9 jaar.

rode reus



Figuur 5: De structuur van een hoofdreeksster (zoals de zon) en een rode reus. De kern van de reus bestaat uit Helium, in de rand eromheen fuseert waterstof.

In de rode-reusfase neemt de helderheid van de zon sterk toe tot ongeveer 100 $L_\odot$. Als de zon die fase bereikt dan stijgt de temperatuur op aarde boven de 400 K zodat de oceanen gaan verdampen en de aarde haar dampkring verliest. Dat zal het einde van het leven op aarde betekenen. Maar dat duurt gelukkig nog ruim 4 miljard jaar.

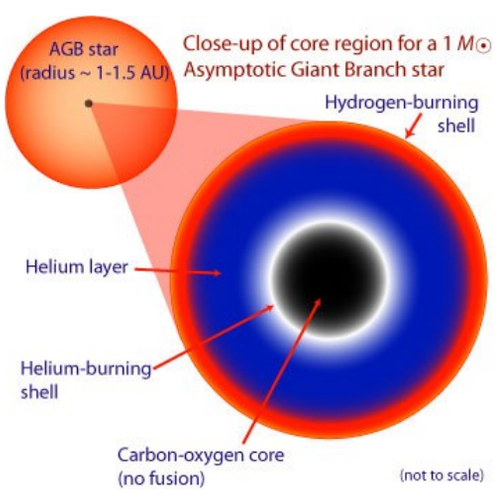
3.3 De latere evolutiefasen: heldere rode reuzen

Als de H-fusie in de schil om het centrum van de zon stopt, dan dreigt er weer een energietekort en gaat de zwaartekracht het weer winnen van de gasdruk. Het centrum van de ster wordt dan nog verder in elkaar geperst, waarbij de temperatuur in het centrum verder oploopt tot boven de 10^8 K.

Bij die temperatuur gaat het voorheen gevormde He in het centrum van de ster fuseren tot C (zie tabel 2 in DE STRUCTUUR VAN STERREN). Rondom dat centrum zit dan nog een schil waar H⟶He fusie optreedt en daar omheen zit dan weer een zeer grote convectieve buitenlaag, de mantel.

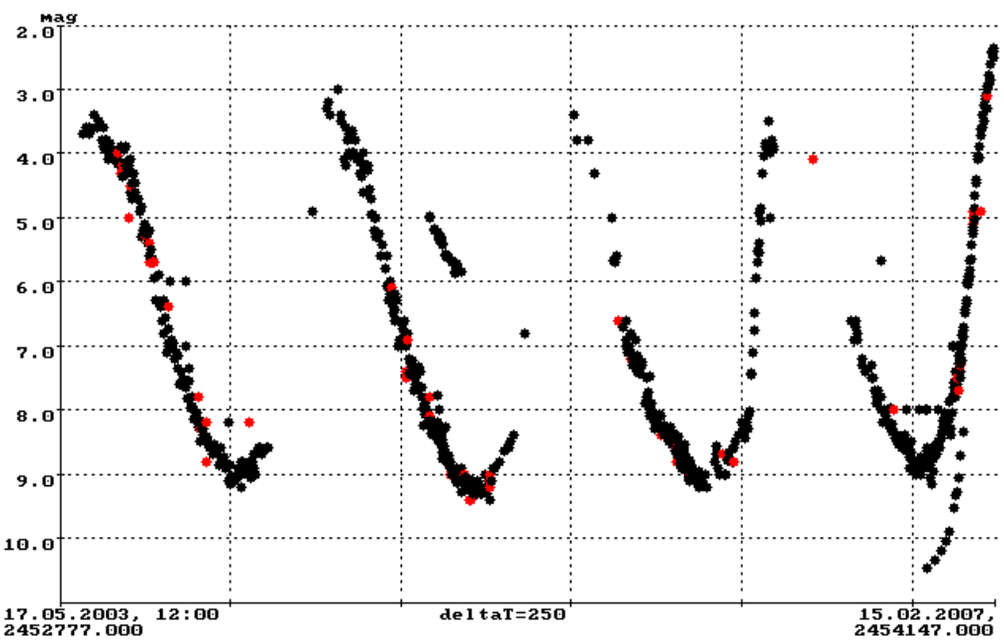
De zon is dan nog verder opgezwollen tot een straal van 100 à 300 $R_\odot$. De temperatuur aan het oppervlak zal dan ongeveer 2.500 K bedragen maar de helderheid kan stijgen tot 10^4 maal de huidige helderheid: de zon is een heldere rode reus geworden. In het Hertzsprung-Russell diagram van figuur 10 in METEN AAN STERREN zitten de heldere rode reuzen bovenin de groep “giants”. Aldebaran is zo’n ster (Zoek die op in deze figuur).

We kennen veel heldere rode reuzen aan de hemel. Dat zijn dus allemaal lichte sterren waarvoor het einde nadert. Als de zon een heldere rode reus wordt dan zal de aarde verdampen en zelfs het gesteente aan het oppervlak van Mars zal smelten! Deze fase waarin de zon een heldere rode reus is duurt ongeveer 10^8 jaar. We moeten wel bedenken dat het centrum van een heldere rode reus zover ineengedrukt is, dat de “pit” van de ster, bestaande uit C en He, niet groter is dan de aarde, en slechts 10^{-12} van het volume van de hele ster omvat, maar wel ongeveer de helft van de totale massa van de ster bevat! (Zie fig. 6).



Figuur 6: De opbouw van een heldere rode reus. De ster is door de convectieve buitenlagen gezwollen tot een straal van 100 à 300 $R_\odot$. Diep in het centrum zit de “pit” van de ster die bestaat uit C en He dat door fusie is geproduceerd. Daaromheen zit nog een schil waar H fuseert tot He.

Uit waarnemingen van heldere rode reuzen blijkt dat deze sterren gaan pulseren: ze zwellen en krimpen op een tijdschaal van ongeveer een jaar. We weten dat omdat we de helderheid van heldere rode reuzen regelmatig zien variëren (zie fig. 7). Sommige sterren doen dat met een periode van een paar maanden, terwijl de langzaamst pulserende sterren ongeveer 10 jaar over een pulsatie cyclus doen. De oorzaak van die pulsaties is niet goed begrepen, maar men vermoedt dat het te maken heeft met de convectieve buitenlagen die regelmatig kunnen uitzetten en inkrimpen.



Figuur 7: De helderheidsvariaties van een heldere rode reus, Mira in het sterrenbeeld de Walvis, die het gevolg zijn van periodiek uitzetten en inkrimpen van de ster, op een tijdschaal van ongeveer een jaar. Metingen door Duitse amateurstronomen.

Door de pulsaties gebeurt er iets merkwaardigs: de ster stoot langzaam al het gas in haar convectieve mantel af. Dat gebeurt ongeveer als volgt. Omdat de ster zo ontzettend is opgezwollen, is de zwaartekracht aan het oppervlak erg laag geworden. Elke keer als de ster uitzet krijgt het gas aan de buitenkant een duw met een snelheid van een paar km/s. Als de ster een paar maanden later dan weer krimpt, valt niet al het gas terug. Door de lage zwaartekracht kan een klein gedeelte wegvliegen. Bij iedere pulsatie verliest de ster zo ongeveer 10^5 à 10^6 zonsmassa. Na ruwweg 10^5 jaar heeft de ster dan, al pulserend, de hele convectieve mantel uitgestoten. Er blijft dan alleen de “pit” van de ster over. Het uitgestoten gas vliegt de ruimte in. Op den duur mengt het met het naburige interstellaire gas. Als het ongeveer 0.1 lichtjaar van de ster verwijderd is zien we het uitgestoten gas als een prachtige ringnevel rondom de overgebleven pit van de ster. Een voorbeeld staat in fig. 8. Deze nevels blijven ongeveer 10^4 à 10^5 jaar zichtbaar, daarna zijn ze zo ijl geworden dat ze niet meer opvallen. Deze heten ook wel *planetaire nevels* omdat ze vroeger werden aangezien voor planeten door hun ringvorm.

planetaire nevel

3.4 Witte dwergen: de overgebleven pitten van dode sterren

De overgebleven pit van de ster bestaat alleen uit He en C, want de H-mantel is uitgestoten. We noemen zo'n overgebleven kleine, zwakke ster een **witte dwerg**. De lichtkracht van een witte dwerg is $L \approx 10^{-4}\ L_{\odot}$. Witte dwergen hebben een massa van ongeveer 0.4 tot $0.8 M_{\odot}$ en een straal die vergelijkbaar is met die van de aarde $R \approx 10^{-2}\ R_{\odot}$.

Figuur 8: Een opname van een ringnevel (M27) die is ontstaan doordat een ster aan het einde van zijn leven zijn buitenlagen heeft uitgestoten. De nevel heeft een diameter van ca 1 lichtjaar en dijt uit met een snelheid van ongeveer 30 km/s. In het midden is een zwak sterretje te zien: de overgebleven "pit" van de ster, die voor-namelijk uit He en C bestaat. De helblauwe kleur geeft aan dat dit een zeer hete witte dwerg is (ong. 80.000 K). Dit is de grootste bekende witte dwerg. De complexe vorm van de nevel is vermoedelijk het gevolg van de rotatie van de ster en van zijn magneetveld. Bron: A. van der Hoeven, opname gemaakt op 08-07-2010 met een 30 cm spiegeltelescoop.

Opgave 2: De dichtheid van witte dwergen

Bereken met de bovenstaande gegevens de gemiddelde dichtheid van witte dwergen.

uitsluitingsprincipe van Pauli

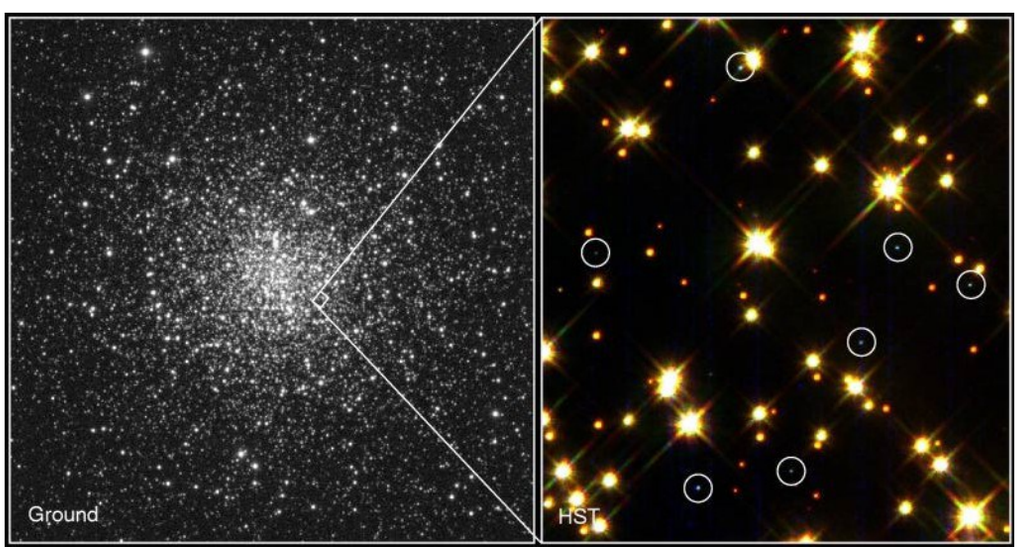
Dat de zwaartekracht de witte dwerg toch niet kan laten krimpen, komt door de gedegenereerde druk. Om dit te begrijpen doen we wat kwantummechanica, en beschouwen een gas waarin veel elektronen zitten. Voor de meeste deeltjes, inclusief elektronen, geldt dat twee deeltjes op dezelfde plek niet dezelfde energie mogen hebben. Dit wordt het *uitsluitingsprincipe van Pauli* genoemd. Een ander belangrijk principe van de kwantummechanica, de onzekerheidsrelatie van Heisenberg, vertelt ons verder dat de plaats en energie van een deeltje niet oneindig precies bepaald zijn. Naarmate de plaats preciezer is, is de energie minder precies. De twee principes samen hebben voor een gas met elektronen de volgende betekenis: als twee elektronen ver van elkaar zitten, mag het energieverschil tussen de elektronen heel klein zijn, maar naarmate de elektronen dichter naar elkaar toe worden gebracht moet hun energie meer verschillen. Als het ene elektron een hele lage energie heeft, moet het andere elektron een hogere energie

hebben naarmate het dichter bij het eerste elektron komt. Als het die energie niet heeft, wordt het van het eerste elektron weggehouden. Dat is de *gedegenereerde druk*.

gedegenereerde druk

In een gewoon, ideaal gas merken we niets van de kwantummechanische beperkingen op plaats en energie. En gewone sterren bestaan geheel uit ideaal gas. Als een gas heel koud wordt of heel dicht, zoals in een afkoelende witte dwerg, worden de kwantummechanische beperkingen merkbaar, en raakt het gas gedegenereerd. Zo'n gas kan alleen verder worden samengeperst als er energie aan wordt toegevoegd; is die energie er niet, dan kan ook de zwaartekracht het gas niet verder samenpersen. Daardoor blijft een koelende witte dwerg even groot.

Onmiddellijk na het afwerpen van de buitenlagen is de kern van een ster nog erg heet, miljoenen graden binnenin en honderdduizenden graden aan het oppervlak. De uitgeworpen buitenlagen van de ster vertonen zich aan ons als een planetaire nevel, met de hete kern in het midden als een kleine ster. Deze ster koelt af, eerst snel en vervolgens langzaam. Daarbij wordt het gas geleidelijk gedegenereerd en gaat de ster over in een witte dwerg. Alleen bij het oppervlak is nog wat ideaal, niet-gedegenereerd gas, dat de atmosfeer van de witte dwerg vormt. Na een miljoen jaar heeft het oppervlak een temperatuur van honderdduizend graden, na een miljard jaar tienduizend graden, en na tien miljard jaar tweeduizend graden. Langzaam aan worden witte dwergen dan ook zo zwak dat we ze alleen nog kunnen detecteren als ze niet te ver weg staan, ruwweg binnen de 10^3 lichtjaar (zie fig. 9).



Figuur 9: Er zijn heel veel witte dwergen in het melkwegstelsel, zoals op deze foto van de Hubble Space telescoop te zien is. Alle omcirkelde sterren zijn witte dwergen. Let ook op hoe zwak ze zijn....

Voor alle sterren die oorspronkelijk een massa van tussen de 0,8 en 8 $M_\odot$ hadden verloopt de evolutie ongeveer hetzelfde. Zij eindigen dus allemaal als een witte dwerg. Dat zal ook het lot van de zon zijn. Er moeten al heel veel witte dwergen zijn gevormd. Allemaal restanten van lichte sterren die al aan hun eind gekomen zijn.

4 De levensloop van zware sterren

De levensloop van zware sterren met $M > 8M_{\odot}$ verloopt ongeveer hetzelfde als die van lichtere sterren zoals de zon. Er zijn echter twee grote verschillen.

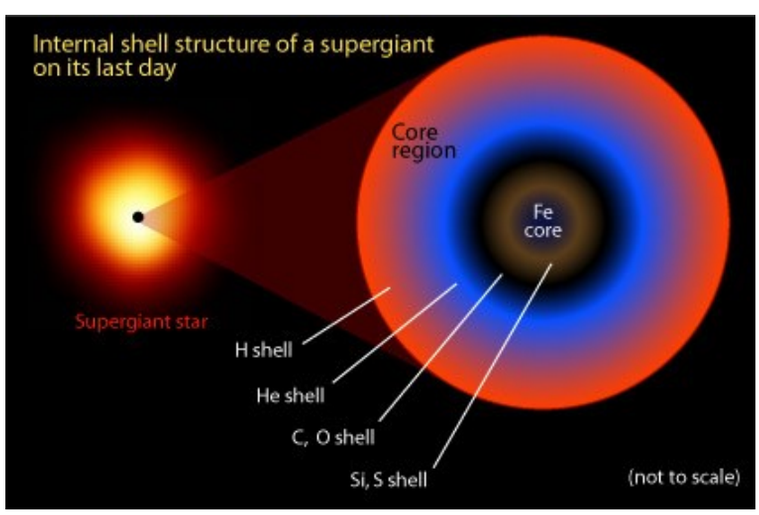
Ten eerste duren alle levensfasen van zware sterren veel korter, omdat zware sterren veel helderder zijn dan lichte sterren.

Bovendien doorlopen zware sterren *alle* fusie-fasen die genoemd zijn in tabel 2 in hoofdstuk DE STRUCTUUR VAN STERREN. Dat komt omdat deze sterren zo zwaar zijn dat het centrum door te krimpen een steeds hogere temperatuur kan bereiken. We zagen eerder dat lichtere sterren afhaken na de heliumfusie omdat de temperatuur niet hoger wordt dan ongeveer $1{\cdot}10^8$ K. Bij zware sterren gaat de fusie door tot en met die van Si → Fe.

We moeten wel bedenken (zie tabel 2 in DE STRUCTUUR VAN STERREN) dat voor elke opvolgende fusiefase een hogere temperatuur nodig is. Die hogere temperatuur wordt het gemakkelijkst bereikt in het centrum van de ster, waar het gas het meest is samengedrukt. Daardoor is de hoeveelheid massa die aan een volgend fusieproces deelneemt steeds kleiner dan de hoeveelheid die aan het vorige proces deelnam. Daardoor neemt de oppervlakte temperatuur steeds verder af. Er komt steeds minder energie vrij bij de reacties en de oppervlakte wordt steeds groter.

Bijvoorbeeld, er doet meer massa mee aan de fusie van H → He dan aan de fusie van He → C fusie, enz. Het gevolg is dat de chemische samenstelling van zo'n ster na de Si → Fe fusie een soort schilstructuur heeft, zoals aangegeven in fig. 10.

De ster is in deze levensfase een rode superreus. In het HR-diagram (zie bijvoorbeeld fig. 10 in METEN AAN STERREN) vind je deze sterren helemaal rechtsboven: het zijn de helderste koude sterren die we kennen. De ster Betelgeuze in het sterrenbeeld Orion is zo'n heldere rode reus.



Figuur 10: De interne chemische structuur van een ster met een massa van meer dan 5 $M_{\odot}$ na de fase van Si → Fe fusie. De ster is dan een heldere rode reus. Merk op dat alle fusie zich heeft afgespeeld in een uiterst klein volume in het centrum van de ster.

4.1 Het einde van zware sterren

Na de Si → Fe fusie in het centrum van de ster is het afgelopen met de fusie en gebeurt er iets dramatisch met de ster. Het centrum van de ster stort in en de buitenlagen exploderen. Dat gebeurt om de volgende reden. Als de fusie dreigt op te houden en de temperatuur en dus ook de druk in de ster dus beginnen af te nemen, dan wint de zwaartekracht het weer van de gasdruk en wordt het centrum van de ster weer verder in elkaar geduwd. Daarbij loopt de temperatuur in het centrum op tot boven de $5 \cdot 10^9$ K. Bij die temperatuur is de straling zo energierijk dat de fotonen voornamelijk *γ*-fotonen zijn.

Die *γ*-straling is zo intens dat het de Fe atomen kan afbreken tot He volgens de reactie

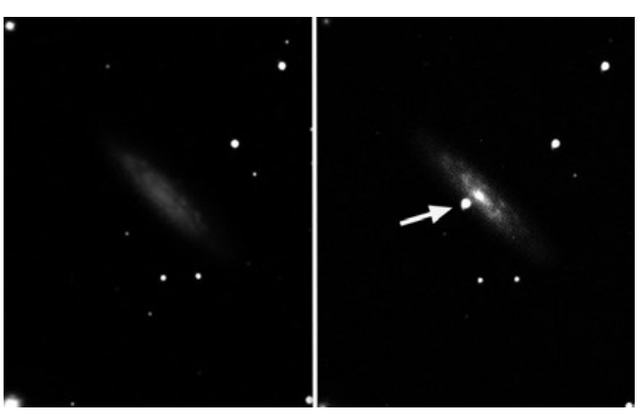
$$^{56}\text{Fe} + \gamma \rightarrow \ 13\ ^{4}\text{He} + 4n + \nu's$$

Die reactie kost energie, in plaats van dat hij energie oplevert. Het gevolg is dat het centrum van de ster afkoelt. Bovendien komen er bij deze reactie veel neutrino's vrij die het centrum bijna ongehinderd verlaten en zo bijdragen aan het energieverlies van het centrum.

Het gevolg is een plotselinge afkoeling van het centrum van de ster waardoor de gasdruk afneemt en het centrum door de zwaartekracht ineenstort. *Het centrum implodeert binnen een paar seconden*!

Terwijl het centrum van de ster ineenklapt worden de buitenlagen explosief de ruimte in geslingerd met een snelheid van meer dat 10^4 km/s. Dit noemen we een *supernova*. Dit komt door twee effecten. Als het centrum van de ster instort vallen de lagen die daar omheen zitten ook mee naar binnen waardoor de dichtheid en de temperatuur in die lagen sterk stijgen. Die lagen bevatten van binnen naar buiten nog Si, O, C en He dat nog niet gefuseerd is. Als de temperatuur en dichtheid in die lagen plotseling toenemen, dan gaan die elementen razendsnel fuseren. Daardoor zijn de lagen rondom het instortende centrum een fusiebom geworden: door de plotselinge energieproductie knallen ze naar buiten.

supernova



Figuur 11: Een supernova waargenomen in sterrenstelsel NGC 3972 voor en na de explosie. Deze supernova werd ontdekt op 26-04-2011 en is rechts gefotografeerd op 01-05-2011 door A. van der Hoeven.

Bij die laatste reacties komen heel veel neutrino's vrij. Die helpen mee aan het uitstoten van de buitenlagen doordat een kleine fractie van de neutrino's toch wordt ingevangen door de buitenlagen van de ster.

Deze explosies aan het einde van het leven van zware sterren worden waargenomen als supernova's, dat zijn plotseling oplichtende sterren die in korte tijd wel een helderheid van $10^8\ L_\odot$ kunnen bereiken. Zelfs als zo'n ster ontploft op een afstand van 3.000 lichtjaar van de aarde is hij nog altijd

helderder dan de helderste planeet Venus aan de hemel! Zij dragen daarbij hun impuls over op die lagen die daardoor nog extra versneld worden naar buiten. Het gevolg is een explosie van de buitenlagen. Dus terwijl het centrum implodeert, exploderen de buitenlagen. De laatste heldere supernova was met het blote oog te zien op het zuidelijk halfrond in 1987. Op 23 februari 1987 ontplofte daar een zware ster op een afstand van 150.000 lichtjaar. Helaas was dat door de locatie aan de hemel niet te zien in Nederland.

4.2 Neutronensterren en zwarte gaten

Verreweg het grootste deel van de massa van de ster wordt uitgestoten. Nu zou men kunnen denken dat de ster haar buitenlagen afwerpt, en een witte dwerg van ijzer nalaat. Dit gebeurt echter niet, en de reden daarvoor is door

Chandrasekhar

de Indiase sterrenkundige *Chandrasekhar* in de jaren dertig uitgewerkt. Een aanvankelijk zwaardere ster zal een zwaardere witte dwerg vormen.

In een witte dwerg met een hogere massa is de zwaartekracht groter: de materie wordt daardoor dichter op elkaar geperst. Een zwaardere witte dwerg is kleiner. Als de elektronen alsmaar dichter op elkaar worden geperst, moeten ze - zoals we boven zagen - ook steeds hogere energieën hebben.

Chandrasekhar merkte op dat volgens de algemene relativiteitstheorie van Einstein energie met massa correspondeert, en rekende voor dat in zeer kleine witte dwergen deze energie/massa merkbaar aan de zwaartekracht gaat bijdragen. Daardoor wordt de witte dwerg nog kleiner, de elektronen krijgen nog meer energie/massa, de zwaartekracht wordt nog groter, enzovoort. Een te zware witte dwerg is instabiel en stort in. De berekende maximale massa van een witte dwerg is ongeveer 1,4 zonsmassa. Als de witte dwerg lichter is, kan gedegenereerde druk de zwaartekracht tegenhouden; is ze zwaarder, dan volgt onvermijdelijk instorting.

Tijdens de instorting gaan de energierijke elektronen met de protonen uit de ijzeratomen in neutronen over volgens, $p^+ + e^- \rightarrow n$ waarna de materie vrijwel geheel uit neutronen bestaat. Bij voldoende hoge dichtheid wordt dit neutronengas gedegenereerd, en houdt verdere instorting tegen. Er ontstaat

neutronenster

een *neutronenster*. In een witte dwerg zijn het gedegenereerde elektronen die de neutronenster zwaartekracht compenseren, in een neutronenster gedegenereerde neutronen.

Neutronen hebben geen elektrische lading en dus ook geen elektrische afstotende kracht. Daarom kunnen ze zeer veel dichter op elkaar gepakt worden dan atomen en electronen. De overblijvende pit van de ster is dan ook een **neutronenster** geworden die bestaat uit neutronengas.

Neutronensterren zijn dus de overblijfselen van sterren die begonnen met een massa van $8M_\odot < M_* < 30M_\odot$.

Opgave 3: De dichtheid van een neutronenster

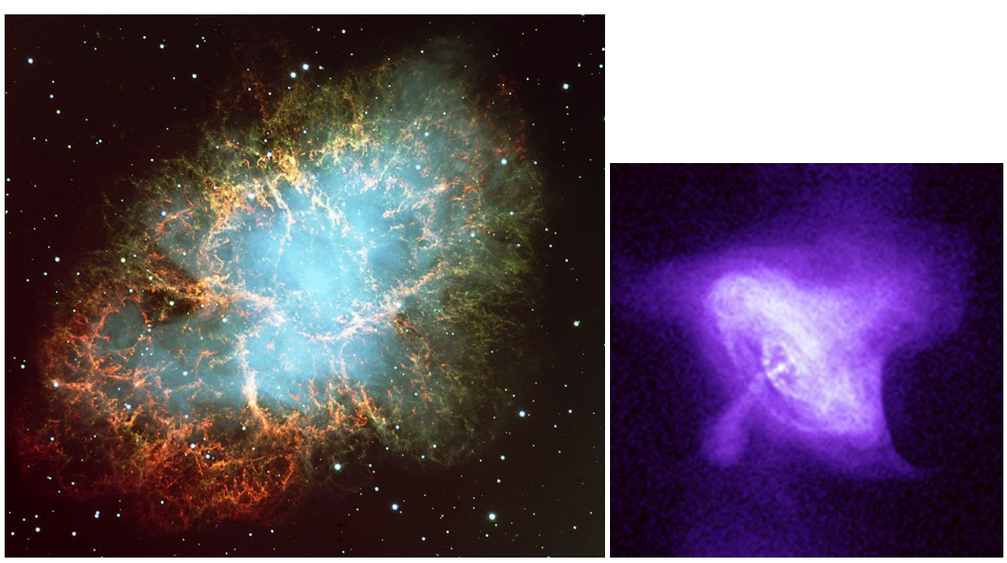
Bereken de gemiddelde dichtheid van een neutronenster als die een massa heeft van 1,5 $M_\odot$ en een straal van 11 km.

Bereken de grootte (straal) van de aarde als die de dichtheid van een neutronenster zou hebben.

Hoeveel weegt 'een theelepeltje neutronenster'?

5 Waarnemingen: een nieuwe ster in het oude China en de Krabnevel

Op 4 juli 1054 verscheen er een nieuwe ster aan de hemel die zo helder was dat ze overdag duidelijk zichtbaar bleef. De sterrenkundigen in dienst van de keizer van China rapporteerden dat de ster ten zuidoosten stond van ζ Tauri, langzaam minder helder werd, en op 16 april 1056 voor het laatst werd gezien.



Figuur 12: De rest van de supernova van 1054. Het blauwe licht in de optische foto links is afkomstig van hoogenergetische elektronen in een zwak magneetveld (synchrotronstraling), het rode licht van recombinerend waterstof (protonen die elektronen vangen). Van twee sterren in het centrum van de nevel is de ster rechtsonder de neutronenster. In het röntgenplaatje (rechts) zien we vanuit de neutronenster in het midden lopende spiralen, en loodrecht daarop twee straalstromen. De doorsnee van de binnenste ring is ongeveer een lichtjaar.

Ook in Japan, Armenië, Turkije, België, Ierland en Italië werd de nieuwe ster gezien. De Krabnevel is de eerste nevel in de lijst van de 18e-eeuwse Franse komeetzoeker Messier: M1. De Leidse sterrenkundige Jan Oort en Chinadeskundige Julius Duijvendak namen in 1942 de Chinese kronieken nog eens nauwkeurig door en bevestigden het in 1921 door de Zweed Knut Lundmark geuite vermoeden dat de Krabnevel het overblijfsel is van een in 1054 als supernova ontplofte ster (ook al staat de nevel ten noordwesten van

ζ Tauri….blijkbaar heeft de Chinese kroniekschrijver zich verschreven). Op recente foto's is de Krabnevel groter dan op oude. Een constante uitdijingssnelheid geeft dan een leeftijd van zo'n duizend jaar. Dat is een extra aanwijzing dat de Krabnevel met de ster van 1054 samenhangt. De Krabnevel is een heldere bron van radiostraling, Taurus A, de helderste bron in het sterrenbeeld de Stier. De Rus Josip Shklovskii begreep dat de radiostraling afkomstig is van hoogenergetische elektronen die in een magneetveld in de Krabnevel spiraliseren. Zulke straling wordt synchrotronstraling genoemd. Ook het blauwige licht uit het midden van de Krabnevel is synchrotronstraling, evenals de röntgenstraling van de nevel. Met dit model kunnen we uitrekenen hoeveel energie de Krabnevel bevat, en met een energieverlies van $4 \cdot 10^{31}$ watt (zoveel als honderdduizend zonnen!), volgt dat ze in enkele maanden door haar energie heen zou zijn. Dat betekent dat er voortdurend energie moet worden toegevoegd om de synchrotronstraling in stand te houden. Een blauw sterretje in het midden van de nevel werd als mogelijke energiebron aangewezen, maar hoe? Dat was onbekend.

Opgave 4: Krabnevel-raadsels

In de bovenstaande paragraaf staat: "Met dit model kunnen we uitrekenen hoeveel energie de Krabnevel bevat, en met een energieverlies van $4 \cdot 10^{31}$ watt (zoveel als honderdduizend zonnen!), volgt dat ze in enkele maanden door haar energie heen zou zijn."

a Hoe groot is de energie-inhoud van de Krabnevel volgens deze gegevens?

In 1967 ontdekten de Britten Jocelyn Bell en Anthony Hewish de eerste pulsar: een bron aan de hemel die elke 1,3 seconde een puls radiostraling uitzendt. Kort daarna werd ook in de Krabnevel een pulsar gevonden die elke 0,033 s een puls uitzendt. De zeer stabiele periode wijst op een rotatie: de Krabpulsar draait elke 0,033 s om de as.

b Als we eisen dat het steroppervlak langzamer beweegt dan de lichtsnelheid, hoe groot kan de ster dan maximaal zijn?

De enige zo kleine ster is een neutronenster. De Krabpulsar is een neutronenster!

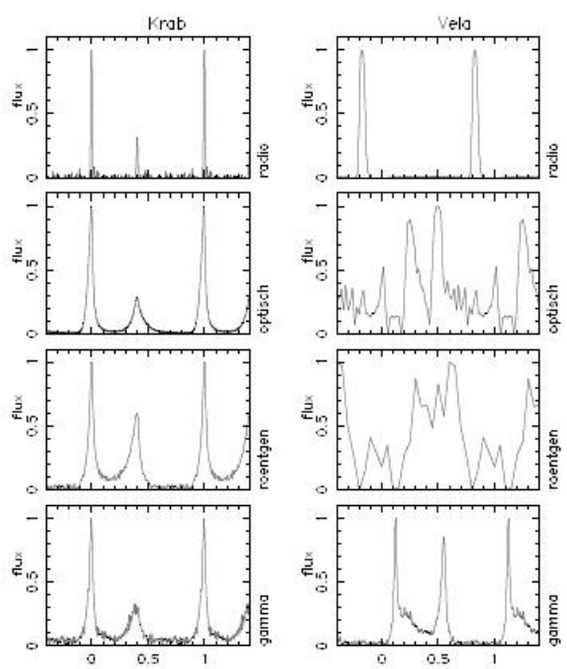
Net voor de ontdekking van de eerste pulsars had de Italiaan Franco Pacini beargumenteerd dat een ijzerkern van een zware ster wellicht een magneetveld heeft, en dat dit magneetveld met de instorting meekrimpt en versterkt wordt. Een neutronenster zou dus een enorm sterk magneetveld hebben.

Een snel roterende magneet verliest echter energie in de vorm van elektromagnetische straling, en gaat daardoor langzamer roteren. Pacini's model voorspelde dus dat de Krabpulsar langzamer zou gaan roteren – en na enige tijd werd dit ook daadwerkelijk gemeten: elk jaar wordt de rotatieperiode van de Krabpulsar 13,3 microseconde langer.

Het product van de periode en de periodeverandering geeft de sterkte van het magneetveld. Het magneetveld van de Krabpulsar is $3{,}7 \cdot 10^8$ tesla, meer dan een miljoen maal het sterkste op aarde door natuurkundigen gemaakte magneetveld.

Een meer precieze berekening laat zien dat de geboorte van de Krabpulsar in 1054 betekent dat de pulsar toen elke 0,016 seconde om de eigen as draaide.

De Krabpulsar vertoont niet alleen pulsen in het röntgen, maar ook in het zichtbare licht en in andere gebieden van het elektromagnetisch spectrum. De electromagnetische straling die de Krabpulsar voornamelijk uitzendt, heeft een golflengte van tienduizend kilometer – veel langer nog dan radiostraling – en wordt door het gas in de Krabnevel geabsorbeerd. De Krabnevel en Krabpulsar vormen het directe bewijs dat de vorming van een neutronenster gepaard gaat met een supernova; ze laten zien dat het model van een neutronenster met sterk magneetveld een juiste schatting geeft van de leeftijd en een goede verklaring voor de energievoorziening aan de nevel om de neutronenster heen.



Figuur 13: Pulsen van de Krab (links) en Vela (rechts) pulsars in radio, zichtbaar licht, röntgen- en gammastraling. Terwijl de pulsen bij verschillende energieën voor de Krab-pulsar gelijktijdig zijn, is dat voor de Vela-pulsar niet het geval. (Door de lage helderheid zijn de optische en röntgendata van Vela vol ruis.) De beste analyse van röntgen- en gamma-straling is die van Lucien Kuiper en Wim Hermsen (SRON Utrecht).

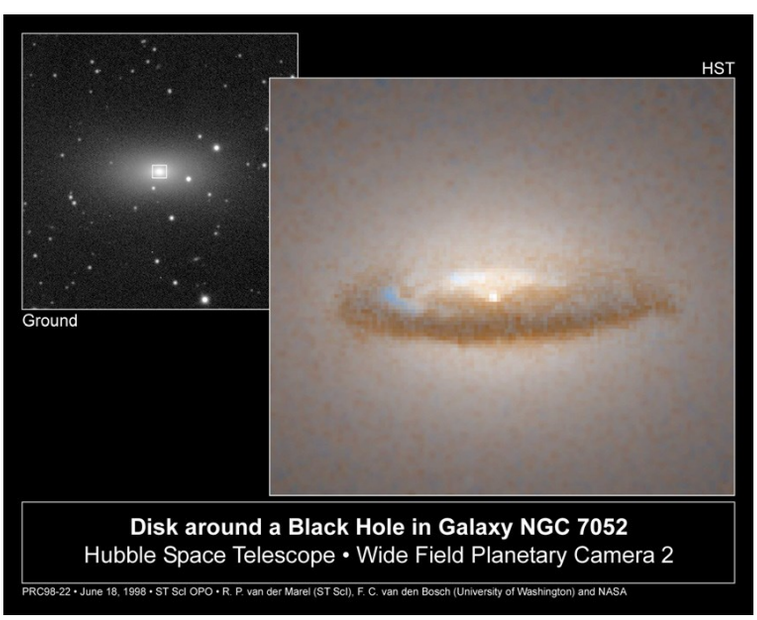
6 Zwarte gaten

Als de ster oorspronkelijk een massa had van meer dan 30 $M_\odot$ dan is de pit van de ster die overblijft na de supernova-explosie zwaarder dan ongeveer 3 $M_\odot$. Die pit is dan zo compact dat het zelfs geen neutronengas kan zijn. Wat het dan wel is weet niemand, omdat we niet weten hoe materie zich gedraagt bij dichtheden die nog groter zijn dan die van een neutronen ster. We weten wel dat de straal van die pit dan kleiner moet zijn dan ongeveer 3 km. Om weg te komen van een pit die zo zwaar is en zo klein zou je een ontsnappingssnelheid moeten hebben die groter is dan de lichtsnelheid! Omdat niets een snelheid groter dan de lichtsnelheid kan hebben kan

er dus niets ontsnappen van zo'n sterretje, zelfs licht niet. Hoe is dat mogelijk? Omdat er zwart gat geen licht ontsnapt noemen we zo'n pit een zwart gat.

6.1 Wat is ontsnappen aan de gravitatiekracht?

Bij de lancering van een ruimtecapsule geeft de stuwraket de capsule een snelheid mee. Bij voldoende grote snelheid kan de capsule bijvoorbeeld naar de maan. Maar daarmee is de capsule nog niet ontsnapt aan de gravitatie van de aarde. De maan draait immers rondjes om de aarde waarbij de gravitatiekracht van de aarde dienst doet als middelpuntzoekende kracht. Stel je nu voor dat de ruimtecapsule zo ver weg gaat, dat de gravitatie van de aarde (vrijwel) nul is. En dat er geen andere objecten zijn (zoals de maan, de zon, andere sterren) die elk ook weer een gravitatieveld hebben. Welke snelheid moet de capsule bij de lancering dan meekrijgen? Die snelheid heet de ontsnappingssnelheid van de aarde en is 11,2 km/s. De zon heeft een sterker gravitatieveld dan de aarde en de ontsnappingssnelheid van de zon is dus groter (618 km/s), terwijl die van de maan juist kleiner is (2,4 km/s).



Figuur 14: Stofring rond een zwart gat in sterrenstelsel NGC7052, waargenomen door de Hubble telescoop.

Hoe sterker de aantrekkingskracht, hoe groter de snelheid die je minstens moet hebben om aan die kracht te kunnen ontsnappen. Een zwart gat, waar niets uit wegkan, moet dus wel een heel grote ontsnappingsnelheid hebben. Maar hoe groot is groot genoeg? En hoe krijg je dat voor elkaar?

Gravitatiekracht en gravitatie-energie

Isaac Newton benoemde in de 17e eeuw voor het eerst de gravitatiekracht en zei dat massa een kracht op afstand uitoefent die evenredig is met de grootte van de massa en ("de omgekeerde kwadraat wet") afneemt met het kwadraat van de afstand r. Dus als je 10 keer verder weg gaat dan is die kracht 10^2 = 100 keer zwakker.

De grootte van die kracht *F* wordt bepaald door een constante, de gravitatie-constante van Newton, meestal *G* genoemd, die de koppeling tussen materie en gravitatiekracht vastlegt. Een massa *m* die op een bol materie (ster, aarde) ligt met massa *M* en straal *R* ligt, wordt aangetrokken met een kracht (alsof alle massa binnen *R* in één punt in het centrum gedacht kan worden)

$$F = \frac{GMm}{R^2} \tag{1}$$

Doordat de gravitatiekracht een aantrekkende kracht is, zitten wij aan de aarde gebonden. Anders gezegd: het "kost energie" (je moet arbeid leveren) om tegen de gravitatiekracht in omhoog te bewegen, zoals iedere fietser van bergetappes merkt. Heuvelafwaarts komt de potentiële energie weer vrij in de vorm van toenemende kinetische energie, dus een toenemende snelheid. Deze energie heet energie van plaats of potentiële energie (of gravitatie-energie), omdat hij afhankelijk is van de plaats in het gravitatieveld. De formule voor gravitatie-energie ken je al:

$$E_{gr} = F_{gr}h = mgh \tag{2}$$

Maar let op: dit geldt alleen zolang de versnelling *g* over de afstand *h* niet verandert. De versnelling van de gravitatiekracht *g* vind je door in de ene wet van Newton de andere in te vullen: *F* = *mg* met de gravitatiekracht van Newton volgens vgl. 1. Dan valt de massa *m* weg en is de versnelling van de gravitatiekracht *g* (op aarde bijvoorbeeld, met *M* massa aarde en *R* straal aarde)

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{3}$$

Hoger boven de aarde (grotere *r*) is de gravitatiekracht kleiner, je kunt dus niet eenvoudig de potentiële energie uitrekenen door kracht maal afstand te nemen.

Het blijkt dat de gravitatie-energie E_{gr} van een massa *m* het volgende oplevert: op een afstand gegeven door straal *R* van een bol met massa *M* is

$$E_{gr} = -\frac{GMm}{R} \tag{4}$$

Deze energie is negatief en neemt toe (wordt minder negatief) bij toenemende *R*.

Op hele grote afstand *r* is de gravitatie-energie nul (omdat $1/r \rightarrow 0$ voor $r \rightarrow \infty$) Dan is de massa vrij, ongebonden, buiten de invloed van de gravitatiekracht. Voor de potentiële energie, dus in het bijzonder voor gravitatie-energie, doet eigenlijk alleen het verschil in die energie tussen twee plekken ertoe.

Je kunt dus kiezen waar je $E_{gr} = 0$ wil hebben, door een constante op te tellen bij de potentiële energie. Die valt in het verschil immers toch weg. We kiezen die constante meestal zo, dat de potentiële energie op grote afstand ($r \to \infty$) nul is.

Extra: berekenen van de potentiële energie op afstand R

Om de potentiële energie te berekenen moet je de kracht over de afstand *integreren* (over afstanden *dr* in kleine beetjes optellen). Energie is kracht maal afstand. Tussen *r* en *r* + *dr* is de kracht $-GMm/r^2$ en de afstand *dr* (de kracht is negatief omdat die naar het middelpunt toe is gericht en *dr* van het middelpunt vandaan is gericht). Dit integreren we tussen $r = R$ en $r = \infty$; gebruik dat $\int 1/r^2 dr = -1/r$. Dan is

$$E_{gr} = \int_R^\infty \frac{-GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{R}\Big]_R^\infty = 0 - \frac{GMm}{R} \qquad (5)$$

Waarom zijn er sterren? We kunnen nu begrijpen waarom er sterren zijn. Sterren ontstaan doordat zwaartekracht altijd aantrekkend is. Dat geldt niet voor de andere drie natuurkrachten. Een ijle gaswolk zal zonder tegenkrachten op den duur samentrekken. Daarbij komt energie vrij (gravitatie-energie). Sterren bestaan omdat de eindtoestand (afzonderlijke sterren in een lege ruimte) een kleinere energie heeft dan de begintoestand (ijle, uitgestrekte gaswolk).

De ontsnappingssnelheid

Een voetbal is gravitationeel gebonden aan de aarde. Geef je de bal een schop recht omhoog (begin-snelheid *v*) dan neemt de hoogte toe en de snelheid af. Hoe hard moet je schoppen om uit het gravitatiekrachtsveld van de aarde te ontsnappen en de snelheid net tot nul afgenomen is? Beter gezegd: hoe groot moet de beginsnelheid van de voetbal dan minstens zijn? Deze snelheid heet de ontsnappingssnelheid v_{ontsnap}. Het is de snelheid die de ruimtecapsule bij zijn lancering minimaal moet hebben om uiteindelijk helemaal uit het gravitatie-krachtsveld van de aarde te ontsnappen. Voor een ruimteveer dat naar een baan om de aarde gaat (bijvoorbeeld naar het International Space Station) geldt een lagere snelheid. Ontsnappen betekent dat de totale energie tenminste nul moet zijn. We hebben immers de gravitatie-energie zo gekozen dat die op oneindige afstand van de aarde nul is, en dichterbij negatief. De totale energie van de satelliet (of wat het ook is dat ontsnapt), kinetische plus potentiële, is dus minstens gelijk aan nul. Je krijgt de grootte van v_{ontsnap} door de som van de kinetische energie en de gravitatie-energie (4) gelijk aan nul te stellen, dus:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnap}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \qquad (6)$$

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (7)$$

Opgave 5: Ontsnappen aan een neutronenster

Bereken de ontsnappingssnelheid voor een compacte ster met een massa van 1 zonsmassa en een straal van 10 km (dat is ongeveer de straal van een neutronenster).

6.2 De ontsnappingssnelheid van een zwart gat

Een van de aannames waarop Einstein zijn Speciale Relativiteitstheorie baseerde is het volgende: **de lichtsnelheid is constant**. Het maakt niet uit hoe snel de bron van het licht beweegt ten opzichte van de waarnemer, in vacuüm beweegt het licht met een snelheid die altijd gelijk is aan
$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s.

Een van de conclusies van de Speciale Relativiteitstheorie is: **niets gaat sneller dan de lichtsnelheid** *c*. Dit geldt voor alle soorten deeltjes en straling, en is een gevolg van het feit dat de klassieke formule voor de kinetische energie, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, voor heel hoge snelheden niet klopt: de energie neemt veel sneller toe met toenemende snelheid, en om een massa *m* een snelheid *c* te geven is zelfs *oneindig* veel energie nodig.

Stel nu eens dat een ster zo compact is dat de ontsnappingssnelheid (iets) groter is dan de lichtsnelheid. Dan kan niets ontsnappen, omdat niets die snelheid kan halen. De ontsnappingssnelheid hangt af van de massa en straal van de ster volgens vgl. 7:

$$v_{\text{ontsnap}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (8)$$

Een ster met een massa *M* heeft dus een ontsnappingssnelheid groter dan *c* als voor de straal *R* geldt dat die kleiner is dan

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{de Schwarzschildstraal} \qquad (9)$$

Deze straal heet de gravitatiestraal, of ook (naar de ontdekker) de Schwarzschildstraal. Omdat je binnen die straal niets meer kunt waarnemen, heet die grens ook waarnemingshorizon.

Een zwart gat is dus een object met een massa *M* en een straal *R* die kleiner is dan de bij die massa behorende Schwarzschildstraal.

De Schwarzschildstraal voor een zonsmassa (invullen van de waarden) levert 3 km op. Persen we de zon (met een straal van $7 \cdot 10^5$ km) samen tot een bolletje met een straal van 3 km, dan hebben we een zwart gat met de massa van die van de zon.

De Schwarzschildstraal is evenredig met de massa. Voor heel kleine massa (bijvoorbeeld een zandkorrel) is *Rs* heel klein, en voor superzware zwarte gaten van een miljard zonsmassa's, is de Schwarzschildstraal 3 miljard km. (De afstand aarde-zon heet een Astronomische Eenheid AE en is 150 miljoen km, De Schwarzschildstraal van een superzwaar zwart gat is dus 20 AE.)

7 De cyclus is rond

7.1 Kosmische recycling

Het gas dat in supernova-explosies wordt uitgestoten met een snelheid van meer dan 10^4 km/s verdwijnt de ruimte in. Het blijft nog duizenden jaren zichtbaar als een expanderende nevel. Na tienduizenden jaren wordt het zo ijl en is de straling zo verzwakt dat de nevel zich oplost in het zeer ijle gas dat de ruimte tussen de sterren vult.

Hetzelfde gebeurt met het gas dat als ringnevels de ruimte ingeblazen wordt aan het einde van het leven van lichte sterren, zoals de zon. Al dat uitgestoten gas mengt zich met het aanwezige interstellaire gas.

Dus een groot deel van het interstellaire gas van de moleculaire reuzenwolken waaruit de sterren werden gevormd komt weer terug in het interstellaire gas. Maar er is wel iets veranderd!

Het gas dat wordt uitgestoten door sterren aan het einde van hun leven heeft niet meer dezelfde samenstelling als het interstellaire gas waaruit de sterren zijn ontstaan. Het komt immers uit sterren waarin kernfusie is opgetreden, en het is dus verrijkt met de fusieproducten zoals He, C, O, Si enz. Als de uitgestoten gassen zich mengen met het al aanwezige gas, wordt het interstellaire gas verrijkt met die fusieproducten.

Op deze manier moet er 4,6 miljard jaar geleden een moleculaire reuzenwolk zijn geweest die zo zwaar was dat hij ging samentrekken en sterren vormde. Een van die sterren was de zon. Uit het gas dat niet op de zon terecht kwam maar er omheen draaide vormden zich de planeten. Een daarvan is de aarde waarop wij wonen.

Omdat de wolk voor een groot deel bestond uit gas dat afkomstig was van stervende sterren bevatte hij elementen als koolstof, zuurstof, kalk, silicium, ijzer enz. Dat is de reden dat nu op aarde (en natuurlijk ook op de zon) al die elementen aanwezig zijn die nodig zijn voor het leven.

Elk zuurstofatoom dat we inademen, elk kalkatoom in onze botten, elk ijzeratoom in onze rode bloedlichaampjes, elk siliciumatoom van de zandkorrels op het strand, ze zijn allemaal ooit eens gemaakt door kernfusie in het inwendige van sterren. Wij zijn gemaakt van sterrenstof!

Figuur 15: Opname van interstellair stof en een nevel (IC 1396, ook wel the Elephant Trunk Nebula) op de golflengtes van waterstof, zuurstof en zwavel. Dit zijn de bronnen van alle materie zoals wij die kennen! Bron: A. van der Hoeven/D. Verloop - 06-06-2011.

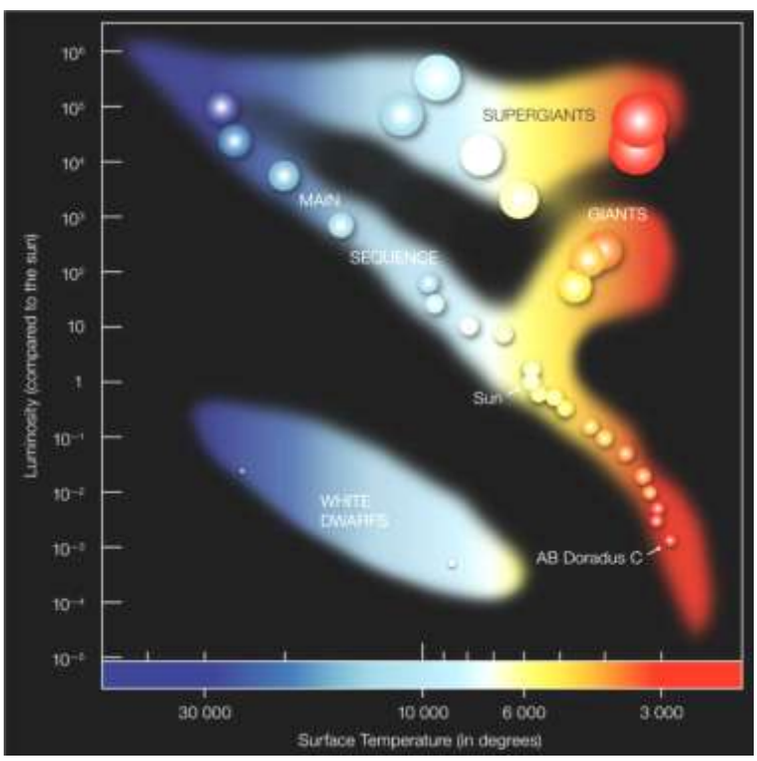
Vorming en ontwikkeling van compacte sterren

1 Inleiding

Eerst zendt de ster een felle flits blauw licht uit. Onmiddellijk daarna vliegt het oppervlak met een snelheid van dertigduizend kilometer per seconde naar buiten. Na enkele uren heeft de ster een doorsnee van honderdmiljoen kilometer, en is zij zo helder als tientallen miljarden sterren samen. De ster is een supernova geworden, in het meest energierijke proces dat het heelal kent na de big bang. Waar komt die energie vandaan? Van de vorming van de kleinste ster die we kennen: een neutronenster of een zwart gat.

Hoe kan dat? Wat is er precies gebeurd? Daarover gaat dit hoofdstuk.

Opgave 1: Hoofdreeks



Hierboven zie je nogmaals het Hertzsprung-Russelldiagram, de ordening van sterren.

a Geef in het diagram aan waar de Hoofdreeks zit.

b Uit welk proces halen deze sterren hun energie?

In de andere delen hebben we gezien hoe de sterren van de Hoofdreeks in elkaar zitten en uit welk proces zij hun stralingsenergie halen.

Na verloop van tijd kan dat proces niet meer verder verlopen. De vraag is, wat er dan met de ster zal gebeuren. Misschien heeft het iets te maken met de sterren in het diagram die niet op de hoofdreeks liggen? Daarover gaat dit hoofdstuk.

Wat gebeurt er aan het eind van het leven van (hoofdreeks-)sterren?

De volgende opdracht helpt je om voorbereid aan het hoofdstuk te beginnen.

Opgave 2: Wat heb je nodig?

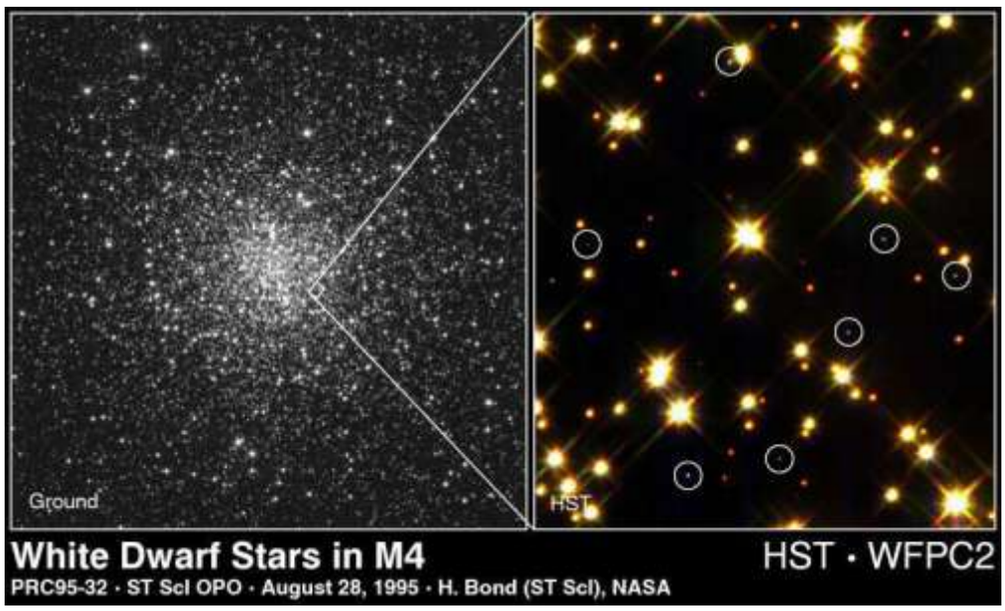
Zoek voor je aan dit hoofdstuk begint de volgende dingen op en zorg dat je (weer) weet wat de symbolen die je daarvoor nodig hebt betekenen.

- De formule voor de gravitatiekracht tussen twee voorwerpen.
- De formule die dichtheid, volume en massa aan elkaar koppelt.
- De grootte en massa van de verschillende types sterren die je bent tegengekomen in de andere delen van dit boek.

---

2 De theorie: van lichte ster naar witte dwerg

Figuur 1: Doordat een lagemassa ster aan het eind van haar leven de buitenlagen afstootte, ontstond deze Ringnevel in de Lier. In het midden staat de 120.000 graden hete sterkern, die zal afkoelen tot een witte dwerg.



Figuur 2: Links: de bolvormige sterhoop M4. Rechts: detailopname, waarop naast de gewone sterren zeer zwakke, blauwe sterren te zien zijn (omcirkeld); dit zijn witte dwergen.

Laten we eerst eens kijken naar sterren die ongeveer zo groot zijn als onze zon.

Een ster als de zon dankt haar bestaan aan het samensmelten in haar binnenste van waterstof tot helium. Bij deze kernfusie komt zeer veel energie vrij, die de temperatuur en druk van het binnenste van een ster hoog houdt. Deze hoge druk probeert de ster te laten uitzetten, terwijl de zwaartekracht de ster juist wil laten krimpen. In een gewone ster heffen de invloeden van druk en zwaartekracht elkaar precies op, zodat de ster stabiel is zolang de voorraad waterstof strekt.

In het binnenste van de zon is alle waterstof na ongeveer tien miljard jaar omgezet in helium. De energiebron is op! De kern krimpt een beetje, en in de schil buiten de kern – waar nog wel waterstof is – worden druk en temperatuur hoog genoeg voor kernfusie. Deze schilverbranding leidt ertoe dat de buitenlagen van de ster gestaag uitdijen, tot de ster wel honderd keer groter is geworden. Omdat de temperatuur van de buitenlagen hierbij wat daalt, is de zo ontstane reus rood van kleur.

De kern van helium krimpt steeds verder, waarbij steeds een nieuwe schil fuseert. De massa van de heliumkern wordt steeds groter, tot de dichtheid erin zo groot is dat het helium gaat fuseren tot koolstof en zuurstof. In enkele seconden fuseert bijna de helft van alle helium, de rest doet er honderdmiljoen jaar over, en het eind van het liedje is dat de buitenlagen van de ster worden afgestoten, en de kern van koolstof en zuurstof overblijft met een heel dun laagje waterstof en helium. Deze kern koelt geleidelijk af tot een witte dwerg.

In een witte dwerg is geen bron van energie meer aanwezig. Dat de zwaartekracht de witte dwerg toch niet kan laten krimpen, komt door de

gedegenereerde druk. Om dit te begrijpen doen we wat kwantummechanica, en beschouwen een gas waarin veel elektronen zitten. Voor de meeste deeltjes, inclusief elektronen, geldt dat twee deeltjes op dezelfde plek niet dezelfde energie mogen hebben. Dit wordt het *uitsluitingsprincipe van Pauli* genoemd. Een ander belangrijk principe van de kwantummechanica, de onzekerheidsrelatie van Heisenberg, vertelt ons verder dat de plaats en energie van een deeltje niet oneindig precies bepaald zijn. Naarmate de plaats preciezer is, is de energie minder precies.

De twee principes samen hebben voor een gas met elektronen de volgende betekenis: als twee elektronen ver van elkaar zitten, mag het energieverschil tussen de elektronen heel klein zijn, maar naarmate de elektronen dichter naar elkaar toe worden gebracht moet hun energie meer verschillen. Als het ene elektron een hele lage energie heeft, moet het andere elektron een hogere energie hebben naarmate het dichter bij het eerste elektron komt. Als het die energie niet heeft, wordt het van het eerste elektron weggehouden. Dat is de *gedegenereerde druk*.

In een gewoon, ideaal gas merken we niets van de kwantummechanische beperkingen op plaats en energie. En gewone sterren bestaan geheel uit ideaal gas. Als een gas heel koud wordt of heel dicht, zoals in een afkoelende witte dwerg, worden de kwantummechanische beperkingen merkbaar, en raakt het gas gedegenereerd. Zo'n gas kan alleen verder worden samengeperst als er energie aan wordt toegevoegd; is die energie er niet, dan kan ook de zwaartekracht het gas niet verder samenpersen. Daardoor blijft een koelende witte dwerg even groot.

Opgave 3: Hoe groot is een witte dwerg?

Stel dat je weet hoe zwaar een witte dwerg is. Kun je dan voorspellen hoe groot hij is? Voor gewone, aardse dingen is dat eenvoudig: de afmeting r hangt (bij vaste dichtheid ρ) samen met de massa m volgens

$$r \sim m^{1/3} \qquad (1)$$

a Leg dit uit.

Voor een witte dwerg is het wat ingewikkelder. Dit heeft te maken met de gedegenereerde druk die er in zo'n ster heerst.

In een ster zijn de zwaartekracht en het drukverschil met elkaar in evenwicht. Dit kun je schrijven als:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \qquad (2)$$

b Wat betekent het minteken in deze formule? Leidt nu af dat de druk in het centrum van de ster (heel ruw) wordt gegeven door:

$$P_c = \frac{GM^2}{R^4} \qquad (3)$$

met *M* en *R* de massa en straal van de ster.

Uit de druk gaan we nu de dichtheid ρ van de ster bepalen. Beschouw hiervoor een gas met *n* deeltjes per kubieke meter. Het gas is volledig gedegenereerd. Dat betekent dat de deeltjes zo dicht op elkaar zitten dat ze allemaal een verschillende impuls moeten hebben. De maximale impuls noemen we p_F (naar de Italiaan Enrico Fermi) en hangt af van de deeltjesdichtheid *n*: hoe groter die dichtheid, hoe groter ook de maximale impuls. Je kunt laten zien (maar dat doen we nu niet; zie keuze-opdracht 11) dat p_F gegeven wordt door

$$p_F = \left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{\frac{1}{3}} h n^{\frac{1}{3}} \qquad (4)$$

waarin *h* de constante van Planck is en *g* een getal dat afhangt van het type deeltjes en voor elektronen en neutronen gelijk is aan 2.

c Gebruik als schatting voor de druk $P = npv \approx np_F v$ en laat zien dat de druk en de dichtheid dan zo samenhangen:

$$P = \frac{K}{m}\rho^{5/3} \qquad (5)$$

waarin *K* een constante is, evenredig met h^2, en *m* de massa van het gedegenereerde deeltje.

d Combineer nu de resultaten van onderdeel b en c en laat zien dat de straal van een witte dwerg van massa *M* (heel ruw) gegeven wordt door:

$$R_{wd} = \frac{K}{m_e} M^{-\frac{1}{3}} \qquad (6)$$

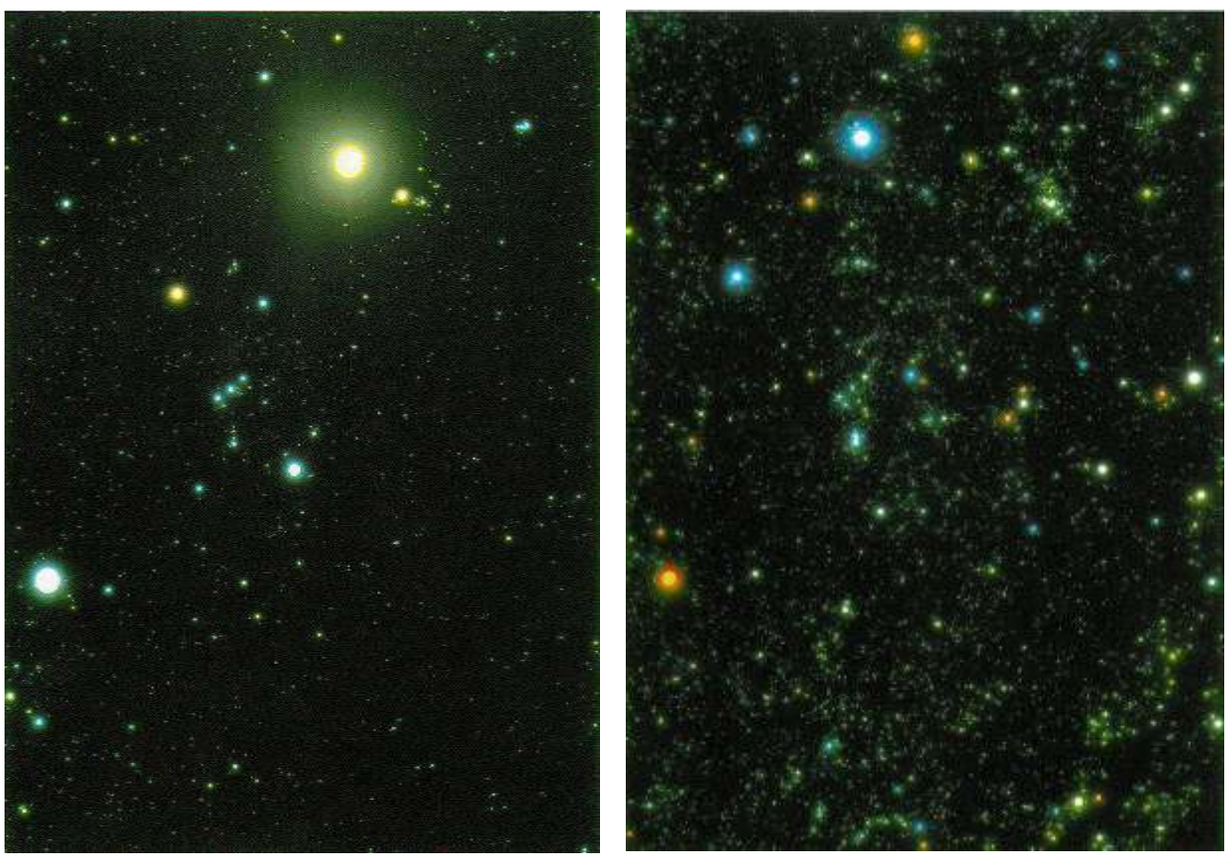
e Vergelijk dit resultaat eens met vergelijking 1. Wat merk je op?
Als je twee witte dwergen hebt, de een acht keer zo zwaar als de ander, welke is dan groter? Hoeveel?

Onmiddellijk na het afwerpen van de buitenlagen is de kern van een ster nog erg heet, miljoenen graden binnenin en honderdduizenden graden aan het oppervlak. De uitgeworpen buitenlagen van de ster vertonen zich aan ons als een planetaire nevel, met de hete kern in het midden als een kleine ster. Deze ster koelt af, eerst snel en vervolgens langzaam. Daarbij wordt het gas allengs gedegenereerd en gaat de ster over in een witte dwerg. Alleen bij het oppervlak is nog wat ideaal, niet-gedegenereerd gas dat de atmosfeer van de witte dwerg vormt. Na een miljoen jaar heeft het oppervlak een temperatuur van honderdduizend graden, na een miljard jaar tienduizend graden, en na tien miljard jaar tweeduizend graden.

3 Waarnemingen aan witte dwergen

Wat kunnen we eigenlijk zien van witte dwergen? Hoe weten we dat ze bestaan?

Omdat een witte dwerg veel kleiner is dan een gewone ster, is een witte dwerg veel minder helder dan een gewone ster met dezelfde temperatuur. Witte dwergen worden daarom het makkelijkst herkend aan hun lage helderheid. De ster Sirius beweegt in een baan om een andere, aanvankelijk onzichtbare begeleider, Sirius B. Toen Sirius B eindelijk werd gezien, bleek ze zo'n lage helderheid te hebben, dat haar straal slechts een honderdste van de zonsstraal moet zijn. Omdat de massa van Sirius B vergelijkbaar is met de zonsmassa, is haar dichtheid veel groter dan die van de zon.



Figuur 3: Een stuk hemel (50 bij 75 graden) rond het sterrenbeeld Orion. In zichtbaar licht (links) is de Maan het helderst, en daarna Sirius (links onder het midden). Links boven het midden Orion, met de drie heldere gordelsterren en de rode reus Betelgeuze. Rechts van de Maan de kop van de Stier, met de rode reus Aldebaran, en de Plejaden. In het röntgenplaatje van ROSAT (rechts) kunnen we de Maan als zwak bronnetje herkennen. Links ervan staat zeer helder de Krabnevel. De bron op de positie van Sirius is de witte dwerg, Sirius B. De gordelsterren van Orion zien we in het röntgen, Betelgeuze en Aldebaran niet. De meeste geelrood weergegeven röntgenbronnen zijn witte dwergen.

Opgave 4: Dichtheid van Sirius B

a Zoek de massa en straal van de Zon op en bepaal daaruit de gemiddelde dichtheid.

b Sirius B heeft ongeveer dezelfde massa als de Zon en een honderd keer kleinere straal. Wat is dan de dichtheid van Sirius B?

Een witte dwerg bestaat voornamelijk uit koolstof en zuurstof. In de atmosfeer kan nog wat helium aanwezig zijn, en wat waterstof, een klein overblijfsel van de buitenlagen van de oorspronkelijke rode reus. Overal in de witte dwerg zijn nog kleine hoeveelheden van de andere elementen aanwezig, zoals ook in de zon. Als de atmosfeer voldoende koel is treedt een bijzonder effect op: door de grote zwaartekracht worden de zwaardere elementen naar beneden getrokken, zodat aan het oppervlak alleen het lichtste element aanwezig blijft. We kunnen dit zien door een spectrum van de witte dwerg te nemen, waarin we de lijnen vinden van deze elementen. Daarbij blijkt dat er witte dwergen zijn met een puur waterstofgas aan het oppervlak, en andere met een puur heliumgas. Een klein aantal witte dwergen heeft voornamelijk koolstof en zuurstof aan het oppervlak – die komen dus van kernen waar de buitenlagen volledig zijn afgeworpen.

De zeer hete diepe lagen van de witte dwerg zenden röntgenstraling uit. Helium of zwaardere elementen in de koelere buitenlagen van de atmosfeer van de witte dwerg absorberen deze röntgenstraling. Als de atmosfeer echter uit heet zuiver waterstof bestaat, vliegt de röntgenstraling er ongehinderd doorheen. Witte dwergen met een atmosfeer heter dan 25.000 graden zijn daarom bronnen van röntgenstraling.

Met de Astronomische Nederlandse Satelliet vonden Rolf Mewe en John Heise van SRON Utrecht in 1975 dat Sirius B zo'n röntgenbron is. EXOSAT, een satelliet van de European Space Agency, en de Duits-Brits-Amerikaanse satelliet ROSAT vonden dat veel minder witte dwergen röntgenstraling uitzenden dan verwacht. De verklaring is dat de atmosferen van veel witte dwergen toch kleine hoeveelheden koolstof, zuurstof en stikstof bevatten, al is hier in het zichtbare licht niets van te zien.

4 De theorie: van zware ster tot neutronenster

In het centrum van een zware ster zijn druk en temperatuur hoger dan in een lichte ster. In een ster die ongeveer tien keer zo zwaar is als de zon fuseert de waterstof daardoor sneller tot helium: zware sterren zijn erg helder en leven kort. Al na zo'n twintig miljoen jaar is de ster door haar waterstof in de kern heen. Net als bij een lichte ster krimpt de heliumkern dan, terwijl de buitenlagen uitzetten.

In een zware ster fuseert het helium geleidelijk tot koolstof en zuurstof; als het helium op is krimpt de kern verder en smelten koolstof en zuurstof samen

tot magnesium, neon en silicium, en verder tot ijzer. Al deze kernfusies leveren energie die de ster voor instorting behoedt. Samensmelten van ijzer tot zwaardere elementen levert echter geen energie op, het kost energie. Met ijzer bereikt de kernfusie haar eindstation.

Nu zou men kunnen denken dat de ster haar buitenlagen afwerpt, en een witte dwerg van ijzer nalaat. Dit gebeurt echter niet, en de reden daarvoor is door de Indiase sterrenkundige Chandrasekhar in de 30er jaren uitgewerkt. Een aanvankelijk zwaardere ster zal een zwaardere witte dwerg vormen.

In een witte dwerg met een hogere massa is de zwaartekracht groter: de materie wordt daardoor dichter op elkaar geperst. Zoals we in opgave 3 hebben gezien, is een zwaardere witte dwerg kleiner. Als de elektronen alsmaar dichter op elkaar worden geperst, moeten ze – zoals we boven zagen – ook steeds hogere energieën hebben.

Chandrasekhar merkte op dat volgens de algemene relativiteitstheorie van Einstein energie met massa correspondeert, en rekende voor dat in zeer kleine witte dwergen deze energie/massa merkbaar aan de zwaartekracht gaat bijdragen. Daardoor wordt de witte dwerg nog kleiner, de elektronen krijgen nog meer energie/massa, de zwaartekracht wordt nog groter, enzovoort. Een te zware witte dwerg is instabiel en stort in. De berekende maximale massa van een witte dwerg is ongeveer 1,4 zonsmassa. Als de witte dwerg lichter is, kan gedegenereerde druk de zwaartekracht tegenhouden; is ze zwaarder, dan volgt onvermijdelijk instorting.

Tijdens de instorting gaan de energierijke elektronen met de protonen uit de ijzeratomen in neutronen over, waarna de materie vrijwel geheel uit neutronen bestaat. Bij voldoende hoge dichtheid wordt dit neutronengas gedegenereerd, en houdt verdere instorting tegen. Er ontstaat een neutronenster. In een witte dwerg zijn het gedegenereerde elektronen die de zwaartekracht compenseren, in een neutronenster gedegenereerde neutronen.

Opgave 5: Hoe groot is een neutronenster?

Een neutronenster is net als een witte dwerg gedegenereerd. Het verschil is dat nu niet de elektronen de deeltjes zijn die voor de gedegenereerde druk zorgen, omdat ze zo dicht op elkaar zitten dat ze niet stil mogen blijven staan, maar de neutronen.

a Bekijk het resultaat van opgave 3. Wat leid je hieruit af voor de straal van een neutronenster in vergelijking met de straal van een witte dwerg van ongeveer dezelfde massa? Neem aan dat de constante K uit die opgave voor de twee typen sterren ongeveer gelijk is.

b Wat betekent dit voor de dichtheid van een neutronenster?

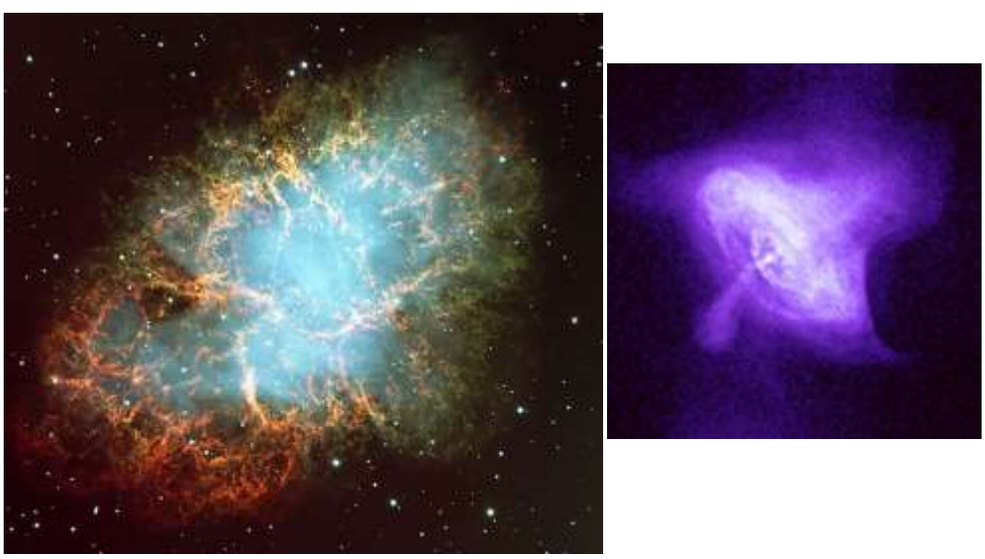
4.1 Waarnemingen voorspeld

Walter Baade en Fritz Zwicky realiseerden zich in 1934 dat de instorting van een ijzerkern van een zware ster tot een bolletje met een straal van zo'n 10 mijl een enorme hoeveelheid zwaartekrachtsenergie vrijmaakt, ruimschoots

voldoende om de buitenlagen van de ster af te werpen. Zij suggereerden dat de vorming van een neutronenster de verklaring is van de in de aanhef van dit deel beschreven supernova. Het idee was moeilijk na te gaan! Een bolletje van twintig mijl kon immers onmogelijk worden gezien... De studie van de Krabnevel bewees dat Baade en Zwicky gelijk hadden.

5 Waarnemingen: een nieuwe ster in het oude China en de Krabnevel

Op 4 juli 1054 verscheen er een nieuwe ster aan de hemel die zo helder was dat ze overdag duidelijk zichtbaar bleef. De sterrenkundigen in dienst van de keizer van China rapporteerden dat de ster ten zuidoosten stond van ζ Tauri, langzaam minder helder werd, en op 16 april 1056 voor het laatst werd gezien. Ook in Japan, Armenië, Turkije, België, Ierland en Italië werd de nieuwe ster gezien.



Figuur 4: De rest van de supernova van 1054. Het blauwe licht in de optische foto links is afkomstig van hoogenergetische elektronen in een zwak magneetveld (synchrotronstraling), het rode licht van recombinerend waterstof (protonen die elektronen vangen). Van twee sterren in het centrum van de nevel is de ster rechtsonder de neutronenster. In het röntgen-plaatje (rechts) zien we vanuit de neutronenster in het midden lopende spiralen, en loodrecht daarop twee straalstromen. De doorsnee van de binnenste ring is ongeveer een lichtjaar.

De Krabnevel is de eerste nevel in de lijst van de 18e-eeuwse Franse komeetzoeker Messier: M1. De Leidse sterrenkundige Jan Oort en China des-kundige Julius Duijvendak namen in 1942 de Chinese kronieken nog eens nauwkeurig door en bevestigden het in 1921 door de Zweed Knut Lundmark geuite vermoeden dat de Krabnevel het overblijfsel is van een in 1054 als supernova ontplofte ster (ook al staat de nevel ten noordwesten van ζ Tauri. . . blijkbaar heeft de Chinese kroniekschrijver zich verschreven). Op recente foto's is Krabnevel groter dan op oude. Een constante uitdijingsnelheid geeft dan een leeftijd van zo'n duizend jaar. Dat is een extra aanwijzing dat de Krab-nevel met de ster van 1054 samenhangt.

De Krabnevel is een heldere bron van radiostraling, Taurus A, de helderste

bron in het sterrenbeeld de Stier. De Rus Josip Shklovskii begreep dat de radiostraling afkomstig is van hoogenergetische elektronen die in een magneetveld in de Krabnevel spiraliseren. Zulke straling wordt synchrotronstraling genoemd. Ook het blauwige licht uit het midden van de Krabnevel is synchrotronstraling, evenals de röntgenstraling van de nevel.

Met dit model kunnen we uitrekenen hoeveel energie de Krabnevel bevat, en met een energieverlies van 4.10^{31} watt (zoveel als honderdduizend zonnen!), volgt dat ze in enkele maanden door haar energie heen zou zijn. Dat betekent dat er voortdurend energie moet worden toegevoegd om de synchrotronstraling in stand te houden. Een blauw sterretje in het midden van de nevel werd als mogelijke energiebron aangewezen, maar hoe? Dat was onbekend.

Opgave 6: Krabnevel-raadsels

In de bovenstaande paragraaf staat: “Met dit model kunnen we uitrekenen hoeveel energie de Krabnevel bevat, en met een energieverlies van 4.10^{31} watt (zoveel als honderdduizend zonnen!), volgt dat ze in enkele maanden door haar energie heen zou zijn.”

a Hoe groot is de energie-inhoud van de Krabnevel volgens deze gegevens?

In 1967 ontdekten de Britten Jocelyn Bell en Anthony Hewish de eerste pulsar: een bron aan de hemel die elke 1,3 seconde een puls radiostraling uitzendt. Kort daarna werd ook in de Krabnevel een pulsar gevonden die elke 0,033 s een puls uitzendt. De zeer stabiele periode wijst op een rotatie: de Krabpulsar draait elke 0,033 s om de as.

b Als we eisen dat het steroppervlak langzamer beweegt dan de lichtsnelheid, hoe groot kan de ster dan maximaal zijn?

De enige zo kleine ster is een neutronenster. De Krabpulsar is een neutronenster!

Net voor de ontdekking van de eerste pulsars had de Italiaan Franco Pacini beargumenteerd dat een ijzerkern van een zware ster wellicht een magneetveld heeft, en dat dit magneetveld met de instorting meekrimpt en versterkt wordt. Een neutronenster zou dus een enorm sterk magneetveld hebben.

Een snel roterende magneet verliest echter energie in de vorm van elektromagnetische straling, en gaat daardoor langzamer roteren. Pacini’s model voorspelde dus dat de Krabpulsar langzamer zou gaan roteren – en na enige tijd werd dit ook daadwerkelijk gemeten: elk jaar wordt de rotatieperiode van de Krabpulsar 13,3 microseconde langer.

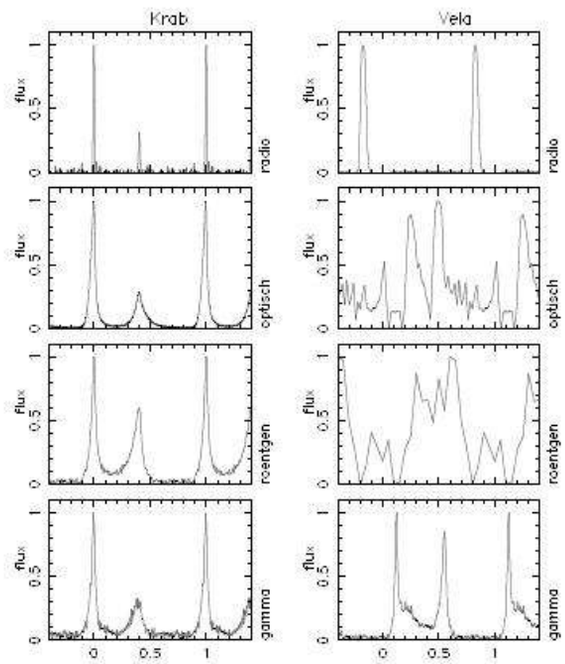
Het product van de periode en de periodeverandering geeft de sterkte van het magneetveld. Het magneetveld van de Krabpulsar is $3{,}7.10^{8}$ tesla, meer dan een miljoen maal het sterkste op aarde door natuurkundigen gemaakte magneetveld.

Opgave 7: Krabnevel-raadsels – vervolg

Beredeneer dat de leeftijd van de pulsar geschat kan worden door de verhouding tussen periodeverandering en periode. Wat levert dat op voor de leeftijd van de Krabpulsar?

Een meer precieze berekening laat zien dat de geboorte van de Krabpulsar in 1054 betekent dat de pulsar toen elke 0,016 seconde om de eigen as draaide.

De Krabpulsar vertoont niet alleen pulsen in het röntgen, maar ook in het zichtbare licht en in andere gebieden van het elektromagnetisch spectrum. De elektromagnetische straling die de Krabpulsar voornamelijk uitzendt, heeft een golflengte van tienduizend kilometer – veel langer nog dan radiostraling – en wordt door het gas in de Krabnevel geabsorbeerd.



Figuur 5: Pulsen van de Krab (links) en Vela (rechts) pulsars in radio, zichtbaar licht, röntgen- en gammastraling. Terwijl de pulsen bij verschillende energieën voor de Krabpulsar gelijktijdig zijn, is dat voor de Velapulsar niet het geval. (Door de lage helderheid zijn de optische en röntgendata van Vela vol ruis.) De beste analyse van röntgen- en gammastraling is die van Lucien Kuiper en Wim Hermsen (SRON Utrecht).

Opgave 8: Krabnevel-raadsels – de oplossing

Leg uit dat hiermee het raadsel van de Krabnevel – wat is de energiebron? – is opgelost.

De Krabnevel en Krabpulsar vormen het directe bewijs dat de vorming van een neutronenster gepaard gaat met een supernova; ze laten zien dat het model van een neutronenster met sterk magneetveld een juiste schatting geeft van de leeftijd en een goede verklaring voor de energievoorziening aan de nevel om de neutronenster heen.

6 Meer waarnemingen aan pulsars

Sinds 1967 zijn meer dan duizend pulsars ontdekt. Dankzij de Krabpulsar weten we dat de pulsars neutronensterren zijn. De meeste pulsars hebben periodes tussen de 0,2 en 3 seconde; periodeveranderingen tussen een nano- en een microseconde per jaar, en magneetvelden tussen de tien miljoen en tien miljard tesla. Tien jaar geleden nog dacht men dat pulsars slechts enkele miljoenen jaren oud waren, maar Dipankar Bhattacharya en Ralph Wijers uit Amsterdam en Jan-Willem Hartman en Frank Verbunt uit Utrecht lieten zien dat pulsars tot honderd miljoen jaar oud zijn.

Opgave 9: De vorm van de bundel radiopulsen

Dat de radiostraling in pulsen de aarde bereikt, geeft aan dat de neutronenster de radiostraling in een bundel uitzendt die rondzwiept met de rotatie van de neutronenster mee.

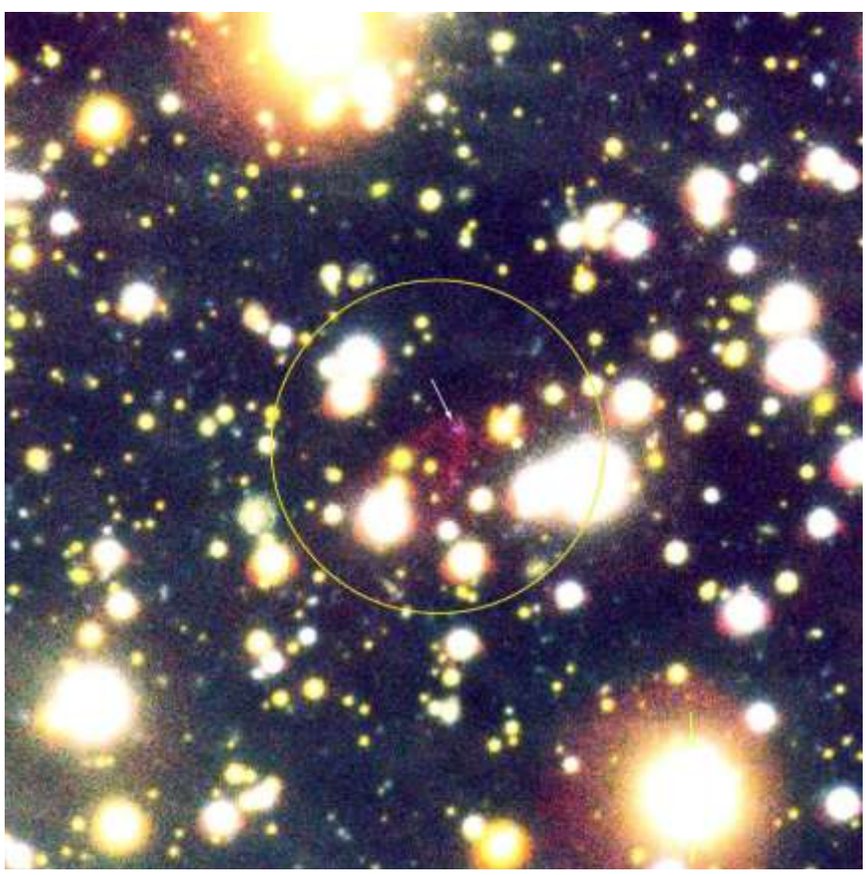
Het blijkt dat die pulsen bestaan uit enkele, dubbele, of drievoudige pieken. Laat zien dat je dit kunt verklaren door aan te nemen dat de bundel eruit ziet als een holle kegel met daarin een kern.

Het snelroterend magneetveld oefent een enorme elektrische kracht uit op de aan het oppervlak van de neutronenster aanwezige elektronen, trekt deze uit de ster, en brengt ze tot snelheden dichtbij de lichtsnelheid. In het magneetveld zendt zo'n elektron een hoogenergetisch lichtdeeltje uit, dat zich splitst in een elektron-positron paar. Die deeltjes worden versneld, zenden lichtdeeltjes uit die zich weer splitsen, en zo komt een regen van elektronen en positronen, een *cascade* op gang. Deze elektronen en positronen zenden radiostraling uit, maar ook zichtbaar licht, röntgenstraling en gammastraling. Waar in het magneetveld dit precies gebeurt, vlakbij de neutronenster of veel verder naar buiten, is nog onduidelijk.

We zagen al dat pulsars in de loop van de tijd langzamer gaan roteren. Als ze te langzaam roteren, wordt het elektrisch veld te zwak om nog een cascade op te wekken, en houdt de radiostraling op. De neutronenster is geen pulsar meer. In ons Melkwegstelsel bevinden zich naar schatting een miljard zulke uitgebluste neutronensterren. Zulke neutronensterren zijn alleen waar te nemen als ze heel dicht bij de zon staan en voldoende heet zijn. De laatste jaren is een handvol zulke objecten met de ROSAT satelliet als röntgenbron ontdekt. De straling van deze neutronensterren komt van het hete oppervlak. Veel pulsars worden niet gedetecteerd, omdat hun radiobundel de aarde mist! Voor elke pulsar die we zien, zijn er tien ongezien. Verrassenderwijs zijn verschillende neutronensterren ontdekt die alleen in zichtbaar licht, röntgenstraling of gammastraling pulsen tonen. Dit zijn vermoedelijk pulsars waarvan de bundel radiostraling de aarde mist, terwijl de bundel zichtbare, röntgen- of gammastraling de aarde nog raakt. Het bekendste voorbeeld van zo'n bron is Geminga, een van de helderste bronnen van gammastraling aan de hemel, op een paar honderd lichtjaar.

De laatste jaren zijn er twee zeer interessante groepen van zulke niet in het radio gedetecteerde pulsars gevonden. De anomale röntgenpulsars hebben pulsperiodes van 5 à 10 secondes, en periodeveranderingen waaruit leeftijden van tienduizenden jaren en extreem sterke magneetvelden van 10^{10} tesla – honderd keer het veld van de Krabpulsar – volgen. De herhaalde zachte gammaflitsers tonen nu en dan uitbarstingen van zachte gammastraling. Tijdens die uitbarstingen zijn in röntgenstraling periodes van enkele secondes gevonden, en periodeveranderingen die wijzen op magneetvelden van 10^{10} tesla en leeftijden van duizenden jaren. De anomale röntgenpulsars en herhaalde gammaflitsers lijken dus sterk op elkaar, maar wat het verband tussen beide groepen neutronensterren is, is niet duidelijk, evenmin als het verband met de gewone pulsars. Dit zal in de komende jaren moeten worden onderzocht. Marten van Kerkwijk, Ferdi Hulleman en Shrinivas Kulkarni zijn er in geslaagd met de Keck telescoop een anomale röntgenpulsar in zichtbaar licht waar te nemen. Hieruit blijkt dat het een enkele neutronenster is, zonder begeleider.

Naast de ster 1054 zijn er nog een handvol andere supernovae geweest die zo helder waren dat ze zonder telescoop konden worden opgemerkt. Uit Chinese bronnen kennen we supernovae uit 185 en 1181, uit Chinese en Europese bronnen een supernova uit 1006, en dan zijn er de door Tycho Brahe en Johannes Kepler in 1572 en 1604 waargenomen supernovae. Van al deze historische supernovae zijn de overblijfselen van de ontploffing, de supernovaresten, gevonden, maar verrassenderwijs is in geen enkele ervan een neutronenster gevonden! (Zie fig. 4 van SUPERNOVA'S).



Figuur 6: Met de Very Large Telescope KUEYEN van de ESO maakten Marten van Kerkwijk uit Utrecht en Shrinivas Kulkarni van het California Institute of Technology dit plaatje van de helderste enkele neutronenster RXJ1856.5-3754, waarop het door de neutronenster in haar omgeving geïoniseerde gas als een rode boeggolf te zien is.

Een interessante supernovarest is de helderste radiobron in Cassiopeia, Cas A. Uit de uitdijing van deze bron volgt een leeftijd van ongeveer driehonderd jaar. Ook in deze supernovarest was geen neutronenster gevonden, totdat de röntgensatelliet Chandra in 1999 als allereerste waarneming een plaatje van Cas A maakte. Eén van de herhaalde gammaflitsers staat nabij de plek aan de hemel waar Chinese sterrenkundigen in 386 mogelijk een supernova hebben gezien.

7 Afsluiting

We begonnen dit hoofdstuk met de vraag

Wat gebeurt er aan het eind van het leven van (hoofdreeks-)sterren?

Kijk terug op het hoofdstuk aan de hand van de volgende punten.

- Welke antwoorden heb je gevonden op de centrale vraag?
- Wat zijn de belangrijkste verschillen tussen de twee soorten compacte sterren uit dit hoofdstuk?
- Wat zou je nog meer willen weten of uitzoeken over compacte sterren als je daarvoor tijd zou hebben?

Opgave 10: Dichtheden

Maak een tabel met verschillende objecten en gebieden uit het heelal en hun (typische) dichtheden. Bijvoorbeeld: een stofwolk, de atmosfeer van de zon, de zon zelf, een witte dwerg, een neutronenster. Let goed op de eenheden en machten van 10! Reken die dichtheden om naar een van de volgende grootheden:

- hoeveel weegt een theelepeltje van dat object?
- hoe groot is 1 kg?
- hoe ver moet je de aarde samenpersen of uitsmeren om dezelfde dichtheid te krijgen?
- hoe ver moet je jezelf samenpersen of uitsmeren om dezelfde dichtheid te krijgen?
- . . .

Opgave 11: Keuze-opdracht: De Fermi-bol

In opgave 3 is een formule afgeleid voor de straal van een witte dwerg als functie van de massa van de ster. Dit is een vervolg op die opgave. Als eerste stap heb je daarin uit het evenwicht tussen zwaartekracht en drukverschil in de ster de volgende benadering voor de druk in het centrum gevonden:

$$P_c = \frac{GM^2}{R^4} \qquad (7)$$

Uit deze druk en het gegeven dat we hier met een volledig gedegenereerd gas te maken hebben, gaan we nu de maximale impuls van de deeltjes in het gas bepalen. Die maximale impuls p_F hebben we in de laatste onderdelen van opgave 3 gebruikt om een verband te vinden tussen de straal en de massa van een witte dwerg.

In deze opgave gaan we de maximale impuls p_F van het gedegenereerde gas van de witte dwerg bepalen. Gedegenereerd betekent grofweg dat de deeltjes in het gas allemaal een verschillende impuls moeten hebben. Om te kijken wat dit betekent stellen we ons het volgende voor. Van elk deeltje kijken we wat zijn impuls is (drie componenten: (mv_x , mv_y , mv_z) en aan de hand daarvan krijgt het zijn eigen plek in een denkbeeldige ruimte die we de impulsruimte noemen. In het punt (0,0,0) zit dus een deeltje dat helemaal stilstaat, in het punt (1,0,0) zit een deeltje dat in de x-richting beweegt en impuls 1 heeft.

Voor een gedegenereerd gas geldt dat de deeltjes in een volume van $1m^3$ net alle plaatsen in de impulsruimte tot aan de impuls p_F opvullen. (Dat is de definitie van p_F.) Omdat de impulsruimte driedimensionaal is, net zoals de 'gewone' ruimte, zijn dat dus alle plaatsen in een bol met straal p_F.

a Maak een tekening van die bol (die de Fermi-bol heet) in de impulsruimte.
Dus teken drie assen, zet erbij wat ze voorstellen en teken de bol.

b Wat is de inhoud van de Fermi-bol?

De grootte van p_F moet zo zijn, dat er precies genoeg plaatsen in de Fermi-bol zijn voor alle deeltjes. De vraag is dus hoe groot die plaatsen zijn. Volgens de theorie zijn het kubusjes van $h \times h \times h$, met h de constante van Planck. Je kunt je de Fermi-bol dus voorstellen als een opstapeling van kleine kubusjes met zijde h.

c Hoeveel van die kubusjes passen er in de Fermi-bol?

d Wegens een kwantummechanische eigenschap van elektronen en neutronen ('spin') passen er twee van zulke deeltjes in elk kubusje. (In het algemeen noemen we het aantal deeltjes dat in hetzelfde 'impulshokje' past g.) Laat nu zien dat als het gas n deeltjes per kubieke meter bevat, dit betekent dat p_F gelijk is aan

$$p_F = \left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{\frac{1}{3}} hn^{\frac{1}{3}} \qquad (8)$$

e In onderdeel c van opgave 3 wordt de druk geschat met $P = npv \approx np_F v$. Laat met behulp van de Fermi-bol en de kubusjes van h^3 zien dat dit niet zo'n gekke schatting is.

constante	symbool	waarde
gravitatieconstante van Newton	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
constante van Planck	h	$6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ J s
constante van Boltzmann	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
constante van Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ J s^{-1} m^{-2} K^{-4}
constante van Wien	k_W	$2{,}8978 \cdot 10^{-3}$ m K
lichtsnelheid	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
protonmassa	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
elektronmassa	m_e	$9{,}10939 \cdot 10^{-31}$ kg
atomaire massa eenheid	amu	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
electronvolt (deeltjesenergie)	eV	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ J
zonsmassa	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
zonsstraal	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m
lichtkracht van de zon	$L_\odot$	$3{,}85 \cdot 10^{26}$ J s^{-1}
effectieve temperatuur van de zon	$T_{\text{eff},\odot}$	5780 K
astronomische eenheid	AU	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ m
parsec	pc	$3{,}086 \cdot 10^{16}$ m

Tabel 1: Veel gebruikte constanten, grootheden en eenheden in de sterrenkunde.

naam	formule
Derde wet van Kepler	$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(M_\odot + M_p)}$
Parallax	$d(\text{pc}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{p('')}$
Fotonenergie	$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$
Effectieve temperatuur	$F_b = \sigma T_{\text{eff}}^4$
Lichtkracht	$L = 4\pi R^2 F_b$
Algemene gaswet	$p_{\text{gas}} V/T = n\mathcal{R}$
Einstein	$E = mc^2$
Massa-lichtkrachtrelatie (gemeten)	$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,8}$
Bindingsenergie	$E_B = \left(N m_n + Z m_p - m(^A\text{X})\right)c^2$
Vrije weglengte	$\ell = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 p N_A}$
Druk in centrum van ster	$P_c = \frac{GM^2}{R^4}$
Straal van een witte dwerg	$R_{wd} = \frac{K}{m_e} M^{-1/3}$
Tijdschaal van vrije val	$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{2R^3}{3GM}}$
Gravitatiekracht	$F = \frac{GMm}{R^2}$
Gravitatieenergie	$E_{gr} = -\frac{GMm}{R}$
De Schwarzschildstraal	$R_s = \frac{2GM}{c^2}$

Tabel 2: Belangrijke formules.

Supernova's: sterexplosies en wat ervan overblijft

1 Inleiding

1.1 Een nieuwe ster

In november van het jaar 1572 bezocht de jonge Deense edelman, en fervent astronoom, Tycho Brahe[1] zijn oom in Zuid Zweden. Het was al een aantal dagen slecht weer geweest, maar op 11 november[2] was het helder. Tot zijn verbazing zag hij iets totaal onverwachts, in het sterrenbeeld Cassiopeia stond een nieuwe ster. De ster was zeer helder. Alleen planeten zijn zo helder, maar planeten staan nooit in het sterrenbeeld Cassiopeia. Hij geloofde niet wat hij zag, was er misschien iets mis met zijn ogen? Hij vroeg zijn bedienden of zij ook een zeer heldere ster zagen. Ze zagen het ook, maar nog steeds kon hij het niet geloven. Bedienden zeggen immers toch wat hun baas wil horen, en Tycho Brahe stond bekend als een moeilijk heerschap.

Er kwam een groepje plattelanders voorbij en dus vroeg hij hun of zij ook iets zagen. Ook zij waren verbaasd, nog nooit hadden zij zo'n heldere ster zo hoog aan de hemel gezien. Eindelijk was Tycho Brahe overtuigd en hij pakte zijn sterrenkundige instrumenten om zo nauwkeurig mogelijk de positie ten opzichte van de andere sterren te meten, en de helderheid en kleur te bepalen.

Ook in de rest van Europa was de ster niet onopgemerkt gebleven. Sterker nog, de ster was al iets eerder waargenomen, voor het eerst op 6 november vroeg in de ochtend, door een zekere W. Schuler in Wittenberg, Duitsland. Maar meer dan een jaar lang bekeek Tycho Brahe de ster en volgde hoe de helderheid afnam en mat hij of de ster van zijn plaats bewoog. En dankzij hem weten we nauwkeurig de positie en de helderheid van de nieuwe ster vanaf november 1572 tot maart 1574.

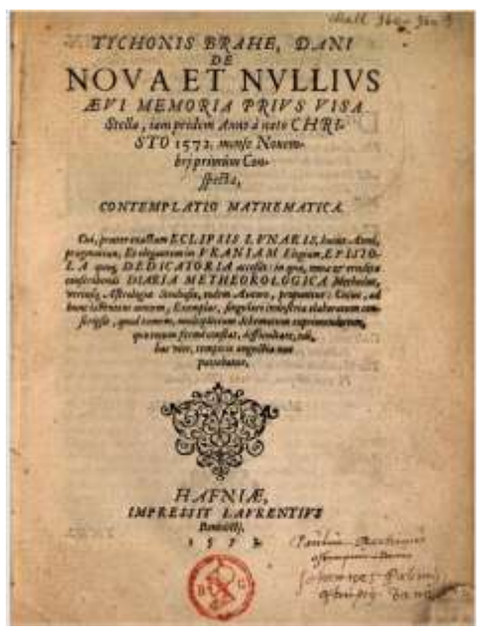
In november was de ster zeer helder, zo helder als Venus en helderder dan Jupiter. Op heldere dagen kon men de ster zelfs overdag zien. En 's nachts als er sluierbewolking was scheen hij door de wolken heen. In december was de ster al minder helder, maar nog steeds vergelijkbaar met Jupiter. In het jaar 1573 bleef de ster zichtbaar, aanvankelijk zo helder als de helderste sterren, maar tegen het eind van dat jaar alleen nog zichtbaar als een zwak sterretje. Tycho Brahe bleef hem volgen, maar uiteindelijk in maart 1574 was de nieuwe ster zo zwak dat die niet meer te zien was.[3]

Tycho Brahe heeft zijn waarnemingen gepubliceerd, al in 1573. Het boekwerkje staat bekend als *De Nova Stella* (zie fig. 1). Later nam hij dit werk met aanvullende gegevens op in *Progymnasmata*, gepubliceerd na zijn dood in 1602.

[1] *Tycho Brahe leefde van 1546-1601*

[2] *In Tycho Brahe's tijd hanteerde men de Juliaanse kalender, er moeten 10 dagen bij opgeteld worden om op de equivalente dag in ons kalender systeem (de Gregoriaanse) te komen. De Gregoriaanse kalender is ingevoerd in 1582, al bleef men in verschillende landen nog lange tijd de Juliaanse kalender gebruiken.*

[3] De telescoop is pas in 1608 uitgevonden, dus alle waarnemingen werden met het blote oog gedaan.



Figuur 1: Links: een portret van Tycho Brahe. Rechts: Twee afbeeldingen uit De Nova Stella van Tycho Brahe (1573). Boven een schets van de positie van de nieuwe ster in het sterrenbeeld Cassiopeia. En onder het titelblad.

Dit hoofdstuk gaat over supernova's, zoals de heel heldere 'nieuwe ster' die gezien werd door Tycho Brahe in de 16e eeuw. De vraag die centraal staat is de volgende.

Wat zijn supernova's en wat blijft ervan ze over?

De volgende opdracht helpt je om voorbereid aan dit hoofdstuk te beginnen.

Opgave 1: Wat heb je nodig?

Zoek voor je aan dit hoofdstuk begint de volgende dingen op en zorg dat je (weer) weet wat de symbolen die je daarvoor nodig hebt betekenen. Gebruik de andere hoofdstukken van dit studieboek en zo nodig een natuurkunde-boek.

- Hoe het spectrum van een zwarte straler afhangt van de temperatuur
- Wat absorptie- en emissielijnen in een spectrum zijn
- Het dopplereffect voor licht
- De formule voor de gravitatie-energie
- Hoe de reactievergelijkingen voor kernreacties eruit zien (fusie en verval)

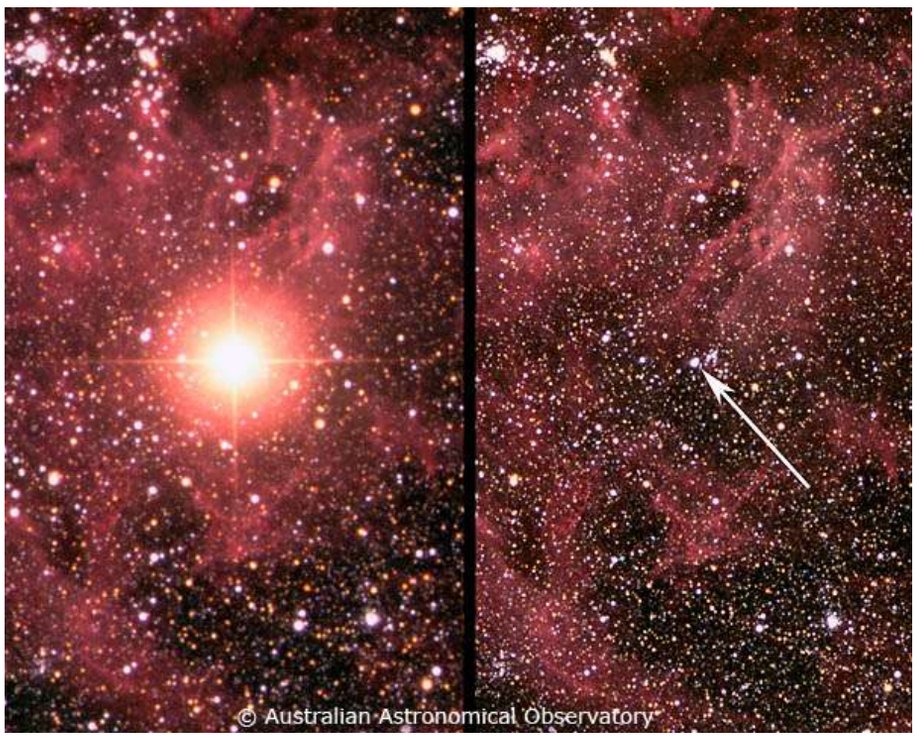
2 Waarnemingen aan supernova's: helderheid, spectra, en classificatie

De nieuwe ster die Tycho Brahe en zijn tijdgenoten zagen in het jaar 1572, is wat wij nu een supernova noemen. Nova betekent nieuw in het Latijn, en vele nieuwe heldere sterren werden er mee aangeduid. Pas in de jaren 30 van de twintigste eeuw, toen nova's werden waargenomen in andere sterrenstelsels, werd het duidelijk dat sommige nova's erg helder zijn, en daarom beter aangeduid konden worden als supernova's.
Inmiddels weten we dat supernova's de explosies zijn van sterren. De explosies zijn zo krachtig dat een supernova het einde van de ster betekent. Dit in tegenstelling tot (gewone) nova's. Daarbij gaat het om explosies op het oppervlak van witte dwergen (zie VORMING EN ONTWIKKELING VAN COMPACTE STERREN), die explosies zijn weliswaar zeer krachtig, maar de witte dwerg blijft gewoon bestaan.
Supernova's zijn veel helderder dan nova's, maar ook vrij zeldzaam. In onze Melkweg zijn er gemiddeld zo'n twee supernova-explosies per eeuw. Vreemd genoeg zijn er minder dan twee per eeuw waargenomen, en de laatste supernova in ons melkwegstelsel, die gezien is met het blote oog is de supernova van het jaar 1604. Dit betekent dat er sinds de opkomst van de moderne sterrenkunde geen enkele supernova is gezien in ons melkwegstelsel.
Met de komst van grote telescopen is dat echter geen probleem, want supernova's zijn zo helder dat ze waargenomen kunnen worden in ver weg gelegen sterrenstelsels. Niettemin kan men meer details meten als de supernova's dichtbij gelegen zijn. Zo hebben we veel geleerd van een supernova ontdekt op 27 februari 1987. Deze ging af in een naburig sterrenstelsel, de Grote Magelhaense Wolk, op een afstand van 50.000 parsec.
Sinds de jaren 1930 is er veel onderzoek gedaan naar supernova's en inmiddels weten we vrij veel over wat supernova's zijn, zoals:

- Welk soort sterren eindigen met een supernova explosie?
- Wat blijft erover na een explosie?
- Wat is de explosie-energie?
- Welke elementen komen vrij bij de explosie?

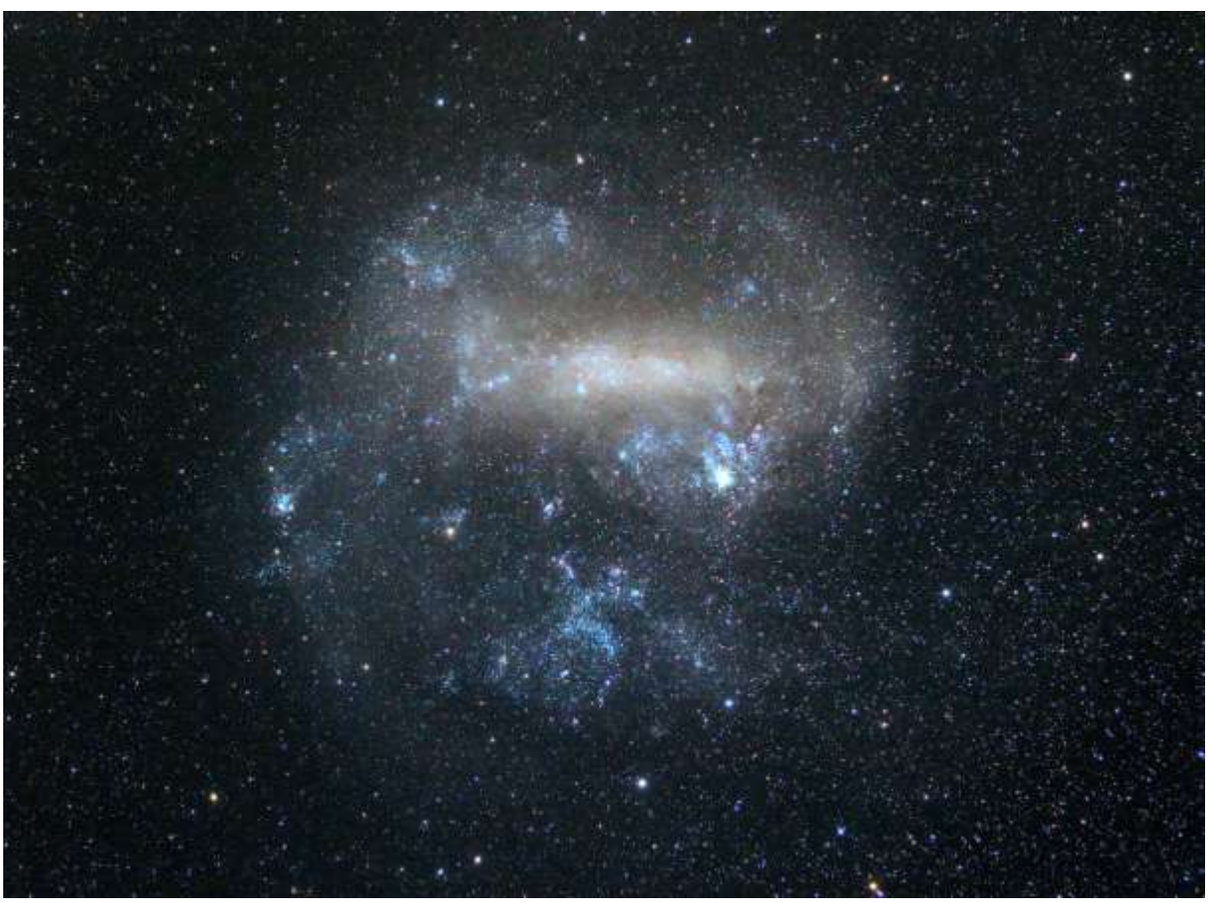
In dit hoofdstuk zullen we deze vragen beantwoorden. Een probleem is

echter dat het inmiddels duidelijk is dat er twee zeer verschillende typen explosies zijn die we supernova noemen.

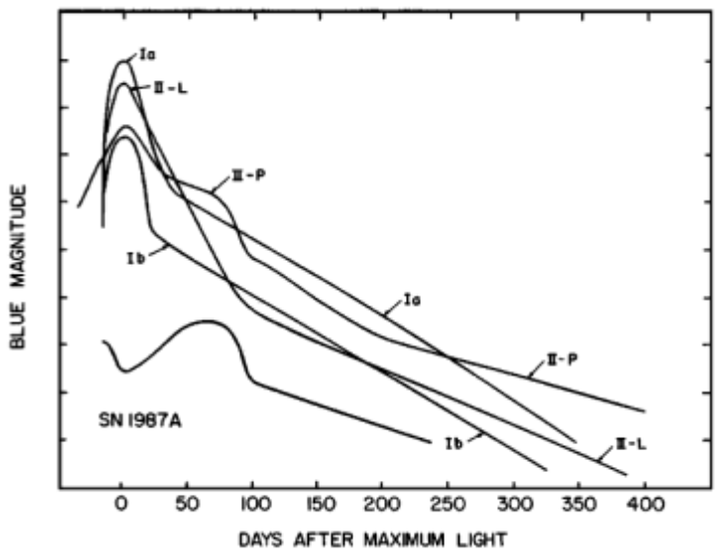


Figuur 2: Rechts: De supernova 1987A (links) naast een afbeelding van hetzelfde stukje hemel voor de explosie. De pijl laat de ster zien die uiteindelijke explodeerde.

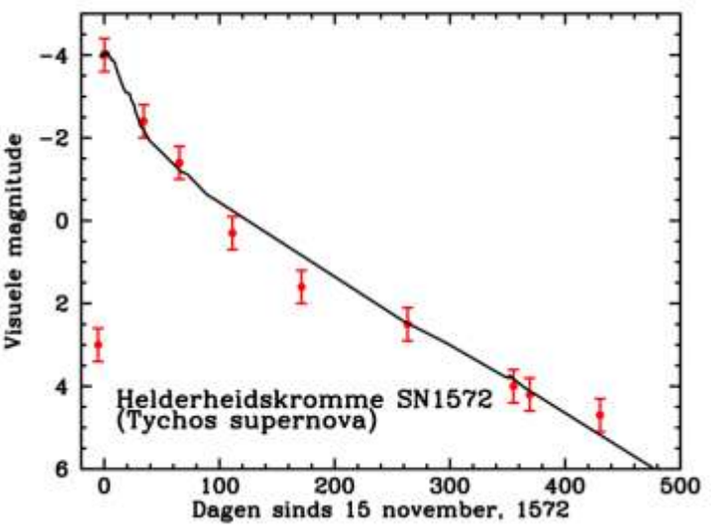
Figuur 3: Onder: Een naburig sterrenstelsel, de Grote Magelhaense Wolk. SN 1987A vond plaats in dit sterrenstelsel. Dit sterrenstelsel is veel kleiner dan ons melkwegstelsel, en is door zwaartekracht gebonden aan onze Melkweg. Zoals de Maan een satelliet is van onze aarde, zo is de Grote Magelhaense Wolk een satelliet van ons melkwegstelsel.



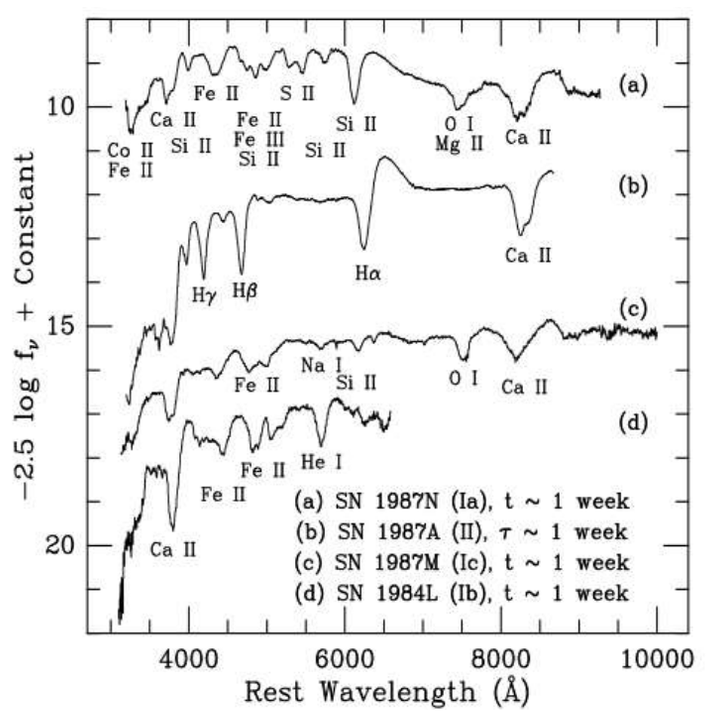
Figuur 4:
Lichtkrommen van supernova's. Schematisch overzicht van lichtkrommen van verschillende types supernova's.



Figuur 5: De datapunten laten de helderheden zien van SN 1572, zoals geschat door Tycho Brahe en later omgerekend door Walter Baade (Baade, 1945), door de helderheid te vergelijken met planeten en sterren. De getrokken lijn is gebaseerd op waarneming van de Type Ia supernova SN1996X (Salvo et al., 2001).



Figuur 6: Optische spectra van supernova's, waargenomen een week na maximale helderheid (Filippenko, 1997). De simpelste spectra zijn die van Type II supernova's, duidelijk zichtbaar zijn de waterstoflijnen. Alle andere typen hebben geen waterstof, maar er zijn andere onderlinge verschillen: Type Ia hebben duidelijke silicium absorptielijnen, Type Ib's laten helium absorptielijnen zien, en Type Ic zowel geen helium als silicium.



Het meeste dat we weten over supernova's hebben we geleerd door het licht van supernova's te bestuderen. Sinds het moderne onderzoek aan supernova's, begonnen in de jaren 20-30 van de vorige eeuw, zijn er belangrijke verschillen tussen supernova's onderling aan het licht gekomen. Hierbij gaat het om de volgende waarneembare verschillen.

Spectrale verschillen Spectra geven informatie over de temperatuur van een gas, de samenstelling en ook over de snelheid. Die snelheid halen we uit de zogenaamde Dopplerverschuiving, een frequentieverandering als gevolg van een snelheid in de richting van of weg van de waarnemer (vergelijkbaar met de verandering van toon in de sirenes van ziekenwagens als die voorbij komen).

Er zijn grote verschillen tussen de spectra van supernova's (zie fig. 6). Een opvallend verschil is dat sommige supernova's absorptielijnen van waterstof laten zien (zie in fig. 6 het spectrum van SN 1987A) terwijl andere supernova's heel veel absorptielijnen tonen, maar geen waterstof.

Het gebrek aan waterstof is opvallend, omdat in het heelal waterstof het meest voorkomend element is: van alle atomen in het heelal is ongeveer 90% waterstof, 10% helium, en de alle andere elementen kun je slechts in promillen of minder aangeven.

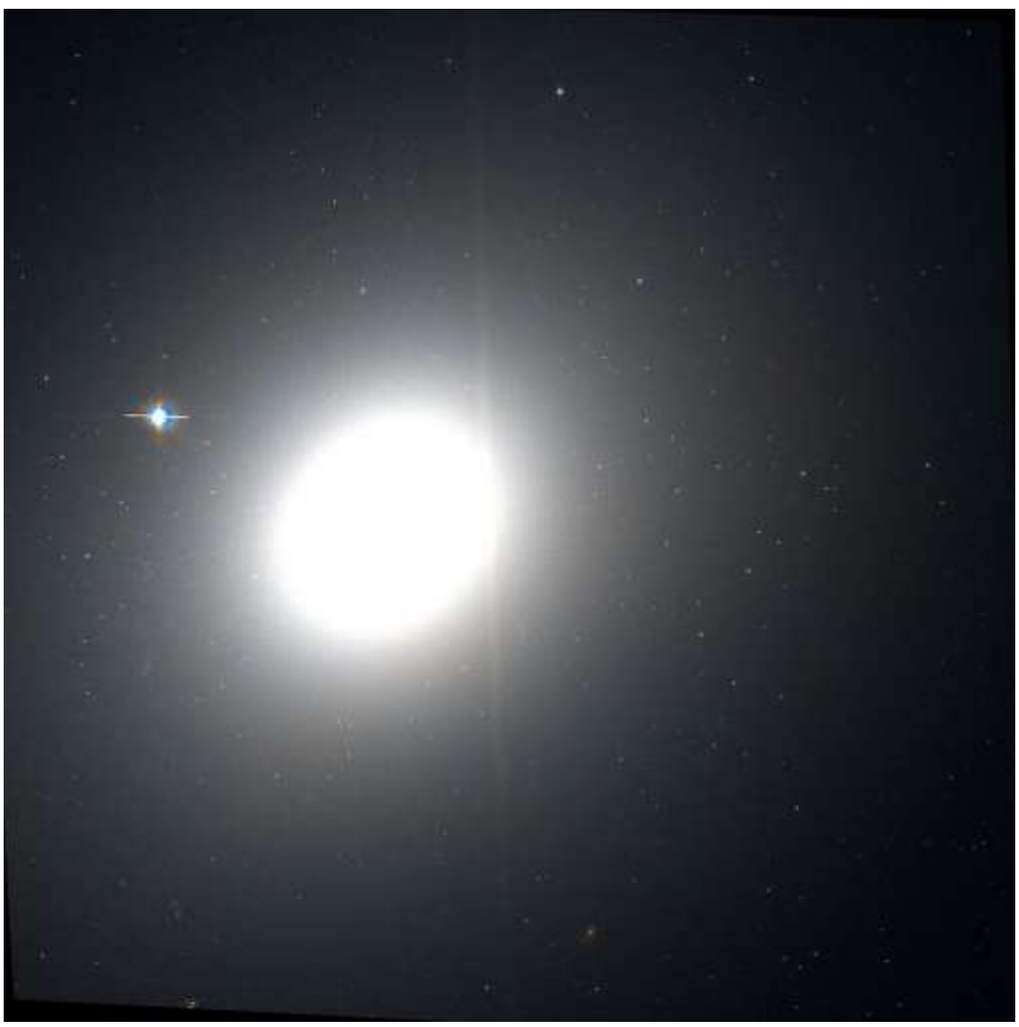
Supernova's zonder waterstof worden Type I supernova's genoemd. Later is dit weer onderverdeeld in Type Ia, Ib en Ic.

Lichtkrommen Een lichtkromme geeft de helderheid als functie van tijd weer (fig. 4). Supernova's kunnen soms jarenlang gevolgd worden. Supernova's hebben niet allemaal dezelfde lichtkrommen, dat hangt af van het type ster dat explodeert.

De lichtkromme laat zien dat na geboorte een supernova snel helder wordt. Dit komt doordat de supernova uitdijt, het stralend oppervlak wordt dus snel groter. Door de expansie neemt langzaam wel de temperatuur af, dit zorgt na een tijd voor een afname in de helderheid. Bovendien wordt het gas in de buitenste lagen transparant. Het stralend oppervlak neemt dus niet zo snel meer toe. Tenslotte hebben veel lichtkrommen een lange staart. Dit komt doordat supernova's radioactief materiaal bevatten, dus de koeling door expansie wordt gecompenseerd door radioactief materiaal dat het gas deels weer verhit.

Locatie In spiraalstelsels (fig. 7) vindt men alle typen supernova's, maar in elliptische stelsels (fig. 8) vindt men alleen typen, die men op grond van het spectrum (geen waterstoflijnen in het spectrum, wel siliciumlijnen) Type Ia noemt. Elliptische stelsels bevatten alleen oude sterren ($> 10^9$ jr).

Figuur 7: Sterrenstelsel uit Messier's catalogus van nevels. Messier 101 (M101) een spiraalstelsel. Ook onze Melkweg is een spiraalstelsel.



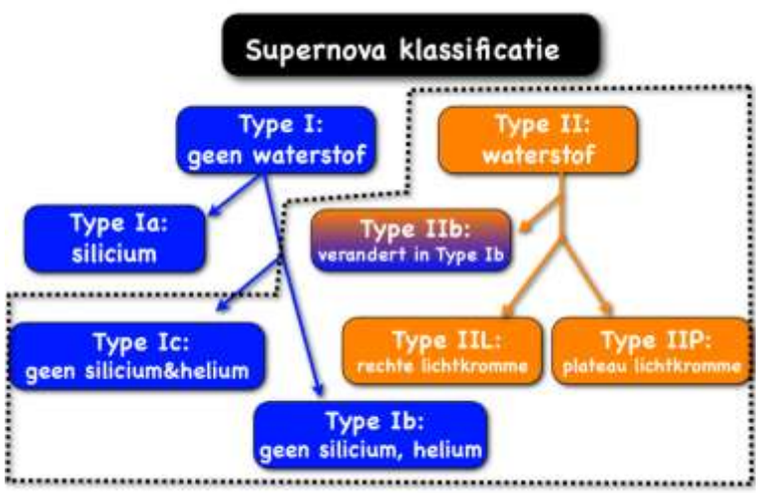
Figuur 8: M49, een elliptisch stelsel. In elliptische sterrenstelsels is de hoeveelheid gas ten opzichte van sterren gering. Er vindt weinig stervorming plaats in elliptische stelsels, en de sterren zijn over het algemeen oud.

Opgave 2: Een schatting van de uitdijingsnelheid

Het maximum in de lichtkromme van supernova's correspondeert met een uitgestraald vermogen van $L \approx 10^{36}$ watt. Dit maximum wordt bereikt zo'n 10-20 dagen na de explosie.

a Neem aan dat de supernova een uitdijend oppervlak is met T = 10.000 K. Wat is dan de straal van de supernova?

b Als dit maximum plaatsvindt na 10 dagen, wat is dan de uitdijingsnelheid?



Figuur 9: Supernovaclassificatie. Deze classificatie is gebaseerd op de aanwezigheid/afwezigheid van spectrale absorptielijnen en op de vorm van de lichtkrommen: in oranje zijn alle supernovatypen aangegeven met waterstofabsorptie, in blauw zonder waterstofabsorptie. Het blijkt nu echter dat een veel fundamenteler verschil is of de ster die explodeert een zware ster is (> 8 $M_\odot$ bij de geboorte), of juist een witte dwerg. De zware sterren zijn aangeven met de stippellijn. De exploderende witte dwerg valt samen met Type Ia.

Opgave 3: Een methode om met Type II supernova's afstanden te meten

De spectra van Type II supernova's lijken relatief nog het meest op die van een zwarte straler. Stel dat we van een Type II supernova aan de hand van het spectrum zowel temperatuur als snelheid (Dopplerverschuiving) kunnen bepalen, en we weten de explosiedatum.

a Hoe kunnen we de afstand tot de supernova bepalen door de helderheid te meten?

b Leid een formule af voor de afstand d als functie van de tijd t sinds de explosie, de gemeten flux f, gemeten snelheid v, en gemeten temperatuur T

3 Supernovatypen

Op grond van de verschillende waargenomen eigenschappen (spectra, lichtkrommen) heeft men supernova's ingedeeld in verschillende typen: Type Ia, Type Ib, Type Ic, en verschillende typen II (zie fig. 6).

Pas sinds de jaren 80 is duidelijk dat deze optische classificatie een veel fundamenteler verschil maskeert: Type Ia supernova's zijn fundamenteel anders dan alle andere typen. Dit blijkt voornamelijk uit de locaties: alleen Type Ia supernova's komen voor in elliptische stelsels. Dit duidt erop dat Type Ia supernova's niet de ontploffingen kunnen zijn van zware sterren (> 8 $M_\odot$ bij geboorte), want die leven korter dan zo'n 50 miljoen jaar, terwijl de sterren in elliptische stelsels veel ouder zijn, vaak meer dan een miljard jaar.

Alle andere typen zijn wel explosies van zware sterren. De aanwezigheid of afwezigheid van waterstof hangt af van de hoeveelheid materiaal dat al tijdens het leven van de ster weggeblazen wordt. Wordt er veel weggeblazen dan blijft alleen de kern van de ster over. Tegen de tijd dat de ster explodeert is in de kern al het waterstof omgezet in helium (Type Ib), of in sommige gevallen in koolstof (Type Ic).

Belangrijk: je hoeft niet te onthouden wat de verschillen precies zijn tussen alle verschillende typen. Wel is het belangrijk te weten dat er een belangrijk verschil is tussen Type Ia en alle andere supernova's!

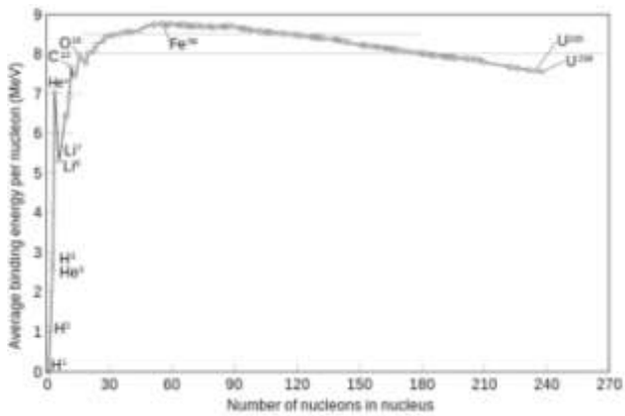
3.1 Zware sterren en supernova's: implosies

Kernfusie in zware sterren

Sterren zijn gasbollen die de neiging hebben samen te drukken door hun eigen zwaartekracht. Die druk wordt weerstaan door de interne druk van het hete gas in het binnenste van de ster (zie DE LEVENSLOOP VAN STERREN). Een ster is erg helder, dus zij verliest energie in de vorm van straling, en koelt dus af. Die afkoeling wordt gecompenseerd door de kernfusie in de kern van de ster: gedurende 90% procent van het leven van een ster wordt in de kern waterstof omgezet in helium.

Is het waterstof omgezet in helium dan krimpt de ster onder haar eigen gewicht tot de kern heet en dicht genoeg is om helium om te zetten in koolstof. In de zwaarste sterren wordt vervolgens koolstof in neon, magnesium, omgezet, en daarna volgen kernfusie stadia die leiden tot de productie van zuurstof, silicium, zwavel en ten slotte ijzer en nikkel.

Die kernfusiestadia duren steeds korter, en na ieder stadium krimpt de kern. Het laatste stadium, waarbij silicium en zwavel wordt omgezet in ijzer en nikkel duurt ongeveer een dag. De sterkern heeft dan een relatief kleine straal: ongeveer 6.000 km, ongeveer vergelijkbaar met de straal van de aarde.
Nu hebben ijzer/nikkel atoomkernen een speciale eigenschap: kernfusie van ijzer levert geen energie op (fig. 10). Dus een ster met een ijzerkern kan niet genoeg energie meer opwekken om de koeling tegen te gaan: de zwaartekracht wint en de sterkern stort in elkaar.



Figuur 10: De bindingsenergie per nucleon. IJzer heeft de grootste bindingsenergie per nucleon, die energie is dus ooit vrijgekomen tijdens de kernfusieprocessen die ijzer vormden. Voor elementen lichter dan ijzer kun je energie verkrijgen door kernfusie, voor zwaardere elementen door kernsplijting. Uit ijzer kun je geen energie halen door kernfusie of kernsplijting.

Implosie tot een neutronenster

De ineenstorting van de kern gaat zeer snel. Tijdens die instorting wordt de potentiële energie omgezet in kinetische energie en warmte. Je kunt dit vergelijken met een bal die je laat vallen. Ook dan wordt de potentiële energie (bepaald door de hoogte boven de grond: $E_p = g \times h$) omgezet in kinetische energie, en uiteindelijk (na een paar keer stuiteren) in warmte. Bij de implosie van een sterkern moet je ieder volumetje van gas zien als een apart balletje. Bij de bal is potentiële energie veroorzaakt door de aardse zwaartekracht, maar voor de sterkern is het de zwaartekracht van de sterkern zelf.

Opgave 4: De gravitatie-energie van een sterkern

Voor een gasbol (een ster of sterkern) met een uniforme dichtheid wordt de totale gravitatie-energie gegeven wordt door:

$$E_{pot} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad (1)$$

a Voor de liefhebbers: laat zien dat dit klopt.[4]

b Reken de potentiële energie uit van een ijzerkern met een massa van 1,4 M_0 en een straal van 6.000 km.

[4]Hints: Wat is de gravitationele energie van een puntmassa *m* in een gravitatieveld van een bol met straal *R* en massa *M*, en wat is dat voor een stukje gas met dichtheid *ρ*? Integratie van een functie *f* (*r*) over een bol oppervlak is $\int_0^R 4\pi f(r) r^2 dr$

Zodra de kern instabiel wordt vindt de implosie zeer snel plaats: de kern stort in op een tijdschaal van een vrije val. Deze tijdschaal wordt gegeven door:

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{2R^3}{3GM}}, \qquad (2)$$

Opgave 5: Hoe snel implodeert de ster?

a Voor de liefhebbers: leidt een vergelijking voor t_{ff} af door aan te nemen dat t_{ff} overeenkomt met de omlooptijd van een object rond een massa M (zie METEN AAN STERREN). (Deze vergelijking verschilt maar een factor < 10 van vergelijking 2)

b Laat zien dat de vergelijking 2 overeenkomt met $t_{ff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi G\rho}}$

c Hoeveel is t_{ff} voor een sterkern met een massa van M = 1,4 $M_\odot$ en R = 6.000 km?

De implosie gaat door zolang de zwaartekracht sterker is dan de druk van de kern. Door de enorme hitte die vrijkomt desintegreren alle atomen (voornamelijk ijzer) weer tot losse protonen en neutronen. De implosie stopt zodra de toestand van de materie de enorme druk kan weerstaan, dit is het geval wanneer de materie een dichtheid heeft iets groter dan in een atoomkern: $\rho \approx 10^{18}$ kg m^{-3}.

Bij deze enorme dichtheid hebben protonen en elektronen de neiging samen te gaan tot neutronen. Met andere woorden *de implosie heeft geleid tot de vorming van een neutronenster*. (Zie VORMING EN ONTWIKKELING VAN COMPACTE STERREN) Bij de omzetting van protonen en elektronen in neutronen komen neutrino's vrij. Neutrino's zijn zeer lichte deeltjes[5] die zich zeer makkelijk door materie heen bewegen. Hun symbool is ν_e[6]. Het antideeltje wordt weergegeven met $\bar{\nu}_e$. De reacties die plaatsvinden terwijl de neutronenster zich vormt zijn:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

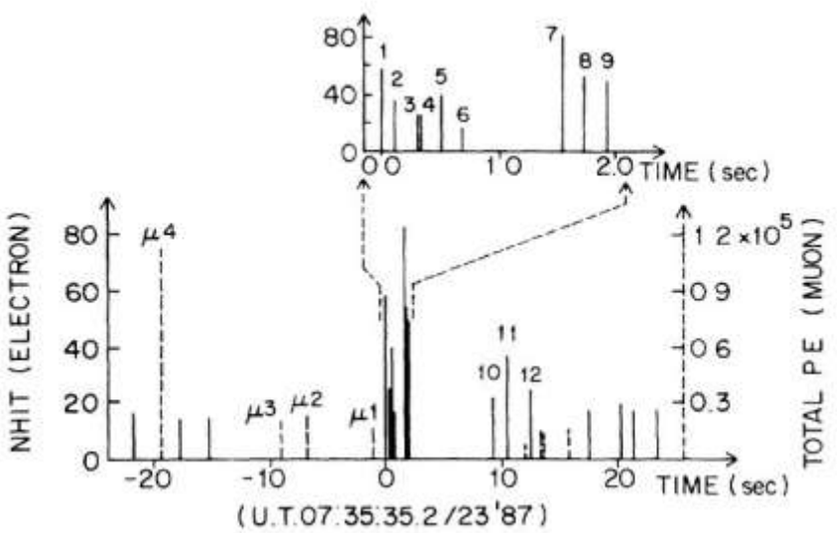
Beide reacties vinden plaats, maar terwijl de neutronenster slinkt schuift het evenwicht naar de vorming van neutronen ten koste van de protonen en elektronen. Bij iedere reactie verdwijnt energie in de vorm van een wegvliegend neutrino.

De theorie van neutronensterren geeft aan dat neutronensterren niet veel zwaarder dan 2 $M_\odot$ kunnen zijn, en niet veel groter zijn dan 12 km (straal). In dubbelstersystemen met een neutronenster, of zelfs dubbele neutronensterren, zijn massa's direct gemeten en de meeste neutronensterren lijken een massa te hebben van $M \approx 1{,}5\ M_\odot$.

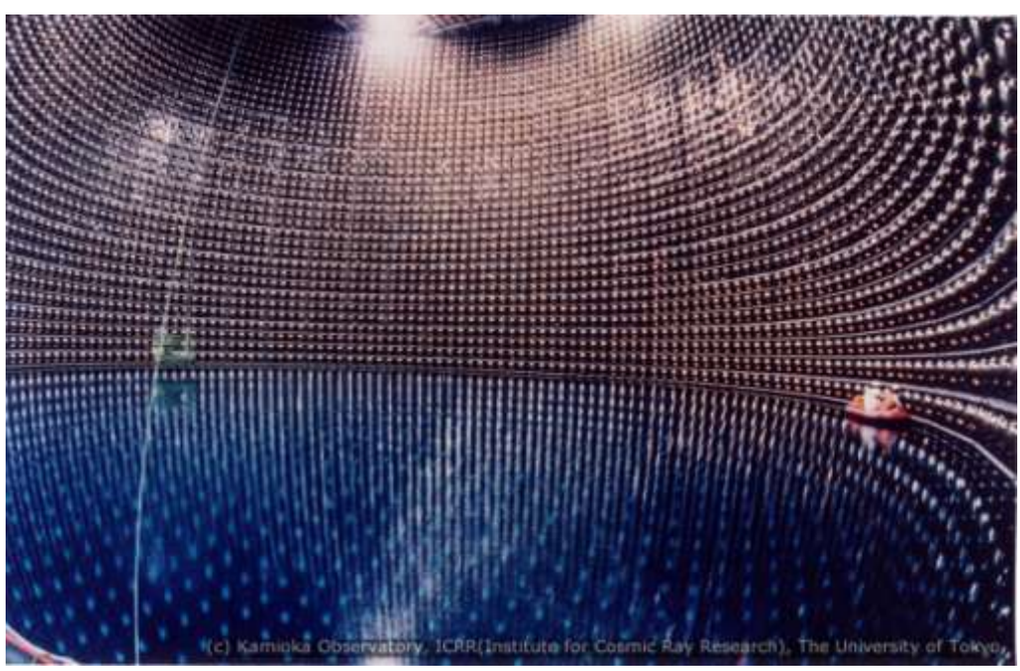
Voor lange tijd was het bovenstaande een goed gefundeerde theorie. Het enige tastbare bewijs voor de theorie was het bestaan van pulsars, snel roterende neutronsterren, waarvan sommige te vinden zijn op plaatsen van historische supernova's (zie hieronder) zoals de pulsar op de plek van SN 1054. Een belangrijke bevestiging van de theorie kwam met de supernova SN 1987A (fig. 3). In de nacht dat de supernova voor het eerst gezien werd detecteerden drie onderaardse neutrinodetectoren een ongewoon aantal neutrino's. De Kamiokande II in Japan detector detecteerde 12 neutrino's (fig. 8), de Irvine-Michigan-Brookhaven detector in de VS detecteerde 8 neutrino's, en de Baksan

[5] Sinds kort weten we dat neutrino's massa hebben.
[6] De e staat voor elektronneutrino, er bestaan ook muon en tau neutrino's.

neutrinodetector in de Kaukasus detecteerde 5 neutrino's. In totaal dus 25 neutrino's. Het lijkt niet veel, maar dit is veel meer dan men normaal in een tijdsbestek van 13 seconden detecteerde. Bovendien zijn neutrino's maar moeilijk te detecteren, ze bewegen overal dwars doorheen.



Figuur 11: de Kamiokande II neutrinodetector in Japan detecteerde 12 neutrino's op 23 februari 1987 in een tijdspanne van 2 seconden rond 7:35 (UT) (Hirata et al., 1987).



Figuur 12: Super-Kamiokande de opvolger van Kamiokande II. Neutrino's laten in zeldzame gevallen een lichtspoor achter in water. Deze worden gedecteerd door de lampachtige detectoren langs de wand van de detector.

Op het moment dat de implosie ophoudt en de kern een neutronster is geworden verplaatst een schok zich door het invallende gas van de rest van de ster. Het idee is dat deze schok zo krachtig is dat hij de rest van de ster wegblaast in een explosie, die wij als een supernova kunnen zien. In computersimulaties blijkt het echter niet zo eenvoudig. De schok ontstaat wel maar is te zwak. Een kleine hoeveelheid energie van de neutrino's helpt misschien om die schok te versterken, maar de onzekerheden zijn groot. Er zijn dus nog veel onzekerheden hoe een kernimplosie tot een explosie leidt. Maar het

gebeurt wel: de implosie is gedetecteerd in de vorm van neutrino's; de explosies zien we als supernova's.

Opgave 6: De energie van supernova's

De totale energie die tijdens de explosie vrijkomt is het verschil in potentiële energie van de sterkern en die van een neutronenster.

a Bereken de vrijgekomen energie als een sterkern met een massa van 1,4 $M_\odot$ en een straal van 6.000 km implodeert tot een neutronenster met een straal van 12 km.

b Type II supernova's zoals SN 1987A exploderen met een energie van 10^{44} J. Hoe verklaar je het verschil met het antwoord onder a?

Opgave 7: Neutrino's afkomstig van SN 1987A

De Japanse neutrino detector Kamiokande II nam op 23 februari 1987, een burst van 12 neutrino's waar met een gemiddelde energie van 15 MeV en een tijdsduur van 2 sec (Hirata et al., 1987, zie fig. 11). Deze burst valt samen met de supernova 1987A die zich bevond op 50 kpc afstand in de Grote Magelhaense Wolk.

a Het Melkwegcentrum ligt op een afstand van ongeveer 8.000 pc. Hoeveel neutrino's zouden we detecteren als daar een Type II supernova zou afgaan?

b De vrije val tijdsschaal is gedefineerd als $t_{ff} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$. Als de kern van een ster met M = 1,4 $M_\odot$ en R = 2.000 km op deze tijdschaal in elkaar stort, hoe snel vormt zich dan een neutronenster? Hoe verhoudt dit zich met de tijdsduur van de waargenomen neutrinoflits?

De Kamiokande II is een tank gevuld met 1,9 10^6 kg puur water, omgeven door lichtgevoelige detectoren, die lichtflitsjes detecteren van neutrino's die een interactie hebben met nucleonen in het water. Hirata et al. denken dat 9 van de 12 neutrinodetecties antineutrino's waren (reactie $\overline{\nu_e} + p \rightarrow e^+ n$).

Om aan te geven hoe groot de kans op een reactie tussen twee deeltjes is, gebruiken natuurkundigen de zogenaamde *botsingsdoorsnede* σ. Hoe groter dit getal (met de eenheid van oppervlakte), hoe groter de deeltjes lijken te zijn, en hoe groter de kans op een reactie. Als je je de reactie voorstelt als een pijl (het ene deeltje) die een schietschijf (het andere deeltje) raakt, dan is σ de oppervlakte van de schietschijf.

De botsingsdoorsnede voor deze interactie in water is $\sigma_{p\bar{\nu}}$(15 MeV)=7 x 10^{-48} m^2.

c Leg uit dat het aantal gedetecteerde deeltjes N_{det} gegeven wordt door

$N_{det} = F_{\nu_e}\sigma_\nu N_p$. Hierin is N_p het totaal aantal protonen en F_{ν_e} de neutrinoflux (aantal/m^2).

d Maak een schatting voor de totale energie die SN 1987A heeft uitgestraald in antineutrino's.

Implosie tot een zwart gat

SN 1987A heeft bevestigd dat een supernova van een zware ster volgt op de implosie van de kern tot een neutronenster. Een neutronenster heeft een maximale massa van zo'n 2 $M_\odot$ (niet precies bekend).

Wat gebeurt er als de instortende kern meer massa heeft dan 2 $M_\odot$? Wat dan heel waarschijnlijk gebeurt is dat de kern dan implodeert en een zwart gat vormt. Men weet niet precies voor welke sterren dit gebeurt, maar waarschijnlijk voor sterren die zwaarder zijn dan 30 $M_\odot$ bij de geboorte (wanneer ze op de hoofdreeks van het HR diagram zitten).

We weten dat zwarte gaten bestaan. Er zijn een groot aantal dubbelsterren waarbij één van de sterren niet direct te zien is, heel klein is en een massa heeft groter dan 2-3 $M_\odot$. Door massaoverdracht zenden deze sterren röntgenstraling uit.

Overigens hoeft de implosie tot een zwart gat niet ineens te gebeuren. Het kan dat eerst een neutronenster gevormd wordt, maar dat langzaam toch nog wat extra gas op de neutronster valt, zodat de neutronenster alsnog implodeert tot een zwart gat.

Eén van de raadsels rond SN 1987A is dat de waargenomen neutrino's aangeven dat een neutronenster gevormd is, terwijl tot op heden nog geen neutronenster waargenomen is op de plaats van SN 1987A. Eén van de mogelijkheden is dat de neutronenster in een later stadium alsnog tot een zwart gat geïmplodeerd is.

3.2 Disrupties van witte dwergen: Type Ia supernova's

Type Ia supernova's vinden plaats in allerlei soorten sterrenstelsels, ook in elliptische stelsels waar de sterren oud zijn. Spectra van Type Ia supernova's laten geen waterstof zien. Met andere woorden, Type Ia supernova's zijn de explosies van oude sterren zonder waterstof. Er is eigenlijk maar een soort ster dat hieraan voldoet namelijk de witte dwerg.

Witte dwergen zijn de sterkernen van sterren die ooit geboren zijn met massa's minder dan ongeveer 8 $M_\odot$. Zoals zware sterren zetten ze waterstof in de kern om in helium. En de wat zwaardere sterren gaan vervolgens door in het omzetten van helium in koolstof, en eventueel koolstof in neon, magnesium en zuurstof. Gedurende hun leven verliezen deze sterren de buitenste, waterstofrijke, lagen. Een groot verschil met zware sterren is dat uiteindelijk de ster, na alle massaverlies, een druk hoog genoeg heeft om de zwaartekracht te weerstaan. Deze druk (zie VORMING EN ONTWIKKELING VAN COMPACTE STERREN) wordt veroorzaakt door een kwantummechanisch effect van elek-

tronen. Dit betekent dat lichte sterren niet door hoeven gaan met fusieprocessen die uiteindelijk tot een ijzerkern leiden. Ze gaan eigenlijk met vervroegd pensioen.

Sterren met 8 $M_\odot$ leven zo'n 10^8 jaar. Een ster als de zon leeft ongeveer 10^{10} jaar. Het heelal is zo'n 10^{10} jaar oud, dus in de loop der tijd zijn er heel wat witte dwergen gevormd, de meeste van sterren met massa tussen de 1 en 8 $M_\odot$. Als een ster eenmaal overgegaan is in het witte-dwergstadium dan is de ster niet erg actief: zij koelt gewoon langzaam af. Aangezien een witte dwerg een straal heeft van rond de 10.000 km, is het licht erg zwak.

Hoe kan zo'n kalme witte dwerg tot een supernova leiden? Het antwoord is dat witte dwergen alleen kunnen bestaan met een massa minder dan 1,4 $M_\odot$. Zou een witte dwerg groeien tot een grotere massa dan kan de interne druk de zwaartekracht niet weerstaan. Dus om supernova te worden moet de witte dwerg steeds zwaarder worden tot hij inkrimpt, dat zal dus gebeuren rond 1,4 $M_\odot$.

Op dat moment neemt de temperatuur en dichtheid in het binnenste zoveel toe dat koolstof en zuurstof spontaan een fusiereactie aangaan. Als dit eenmaal gebeurt, zorgt de hitte van de reactie dat de fusiereacties zich snel door de hele ster verspreiden en de hele ster ontbrandt. Het voornaamste product van die verbranding is nikkel isotoop ^{56}Ni, een radioactief element dat vervalt als: $^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}\text{Co} \rightarrow {}^{56}\text{Fe}$. ^{56}Ni heeft een levensduur van gemiddeld 8,8 dagen en^{56}Co van 111 dagen. Het is dus het radioactief verval van kobalt (Co) dat zorgt dat Type Ia supernova's zoals Tycho's supernova zo lang zichtbaar blijven.

Een vraag is nog niet beantwoord: waarom zou een witte dwerg in massa toenemen? Het antwoord is dat dit normaal gesproken niet gebeurt, tenzij de witte dwerg onderdeel is van een dubbelster systeem. Als de andere ster een normale ster is, die op een gegeven moment een rode reus wordt, dan kan materie van deze ster overstromen naar de witte dwerg.
In sommige gevallen leidt dat tot een explosie op het oppervlak van de witte dwerg: dit wordt waargenomen als nova's. Is de witte dwerg echter dicht tegen de 1,4 $M_\odot$ dan zorgen koolstof/zuurstof fusie voor voldoende energie om de witte dwerg in zijn geheel te laten ontploffen.

Opgave 8: Een witte-dwergexplosie

Een witte dwerg met een straal van 0,01 $R_\odot$ en massa M = 1,4 $M_\odot$ ontploft.

a Hoeveel energie is daarvoor nodig? (Gebruik vergelijking 1)

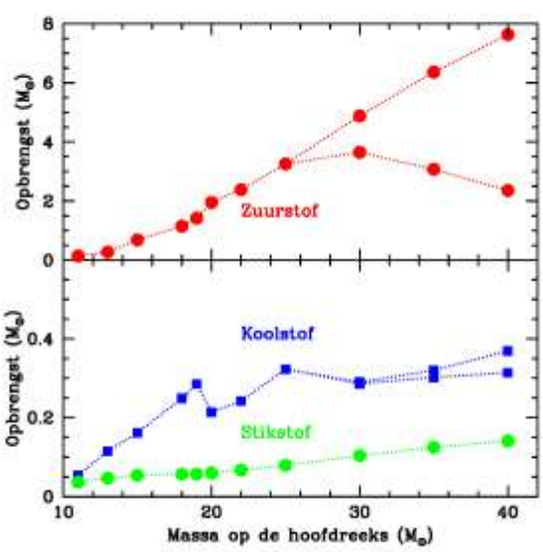
b Neem aan dat de witte dwerg helemaal uit zuurstof bestaat, hoeveel ^{16}O (in zonsmassa's) moet er dan minimaal omgezet worden in ^{56}Ni om de ster te laten exploderen? (Gebruik $m(^{16}\text{O})$ = 15,994915 amu en $m(^{56}\text{Ni})$ = 55,942136 amu).

3.3 Verschillen tussen Ia en de andere typen

Je ziet dat er belangrijke verschillen zijn tussen Type Ia supernova's aan de ene kant en andere supernova's aan de andere kant: in een Type Ia supernova explodeert een witte dwerg, (in plaats van een normale ster), de witte dwerg wordt vernietigd, terwijl bij andere typen een neutronenster gevormd wordt. Ten slotte: bij Type Ia explosie is de energie afkomstig van kernfusie, terwijl bij de andere typen zwaartekrachtsenergie de energiebron is. Je vindt dit samengevat in Tabel 1

SN Type	Kernimplosie Supernova	Thermonucleaire explosie
Soort ster	Zware sterren ($M > 8M_{\odot}$)	Witte dwerg in dubbelstersysteem
Locaties	alleen spiraalstelsels (jonge sterren)	alle typen sterrenstelsels
Energiebron	*Zwaartekracht*: implosie van de sterkern	*Kernfusie*: Ontbranding van koolstof / zuurstof
Oorzaak	Sterkern bestaat uit ijzer / nikkel: kernfusie produceert geen energie, de kern koelt & druk in de kern neemt af: de kern implodeert onder eigen gewicht.	Massa-overdracht van begeleidende ster: de witte dwerg bereikt maximale massa ($1.4M_{\odot}$); de druk neemt toe en zuurstof / koolstof ontvlamt
Overblijfsel	Neutronenster (bijv. een pulsar) schil explodeert met 5000-20000 km/s	De witte dwerg wordt totaal vernietigd en explosiesnelheden zijn 20000 km/s
Vrijkomende energie	99% neutrinos en 1% beweging / straling	100% bewegings- / stralingsenergie
Productie	vooral zuurstof, neon, magnesium, silicium	vooral ijzer / nikkel
Observationele typen	Type II, Ib, Ic	Type Ia

Tabel 1: De belangrijkste verschillen tussen de twee klassen van supernova's.



Figuur 13: De berekende uitstoot van koolstof, stikstof en zuurstof door de supernova van een zware ster (Type II, of Type Ib/c) als functie van de massa bij de geboorte. De berekeningen zijn gedaan door Woosley & Weaver (1995). Een onzekerheid is of bij zwaardere sterren een neutronenster ontstaat of een zwart gat. In het laatste geval verdwijnt een deel van het gemaakte koolstof en zuurstof in het zwarte gat. Om deze reden zijn voor zware sterren twee waarden aangegeven.

4 Supernovarestanten

Wat blijft er over na de explosie van een supernova?

4.1 Supernova's en de oorsprong van de elementen

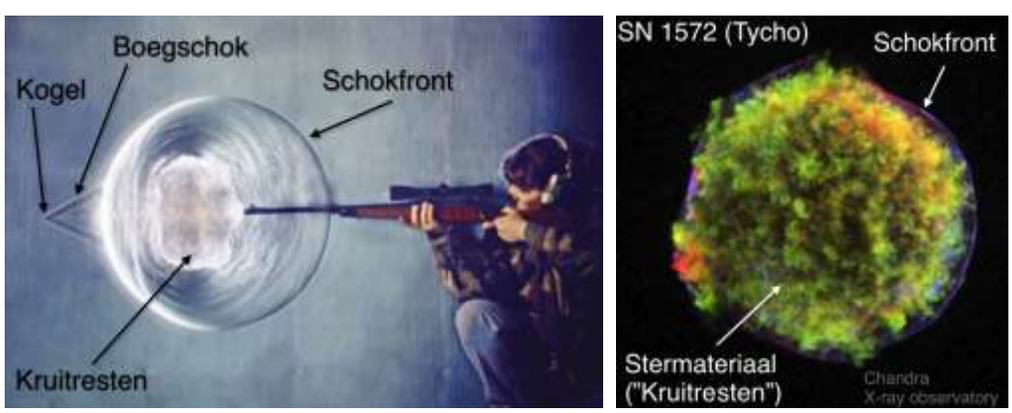
Zoals je weet, zijn er veel verschillende elementen. Wij zelf bestaan voornamelijk uit koolwaterstoffen, moleculen gevormd uit koolstof en waterstof atomen. Andere belangrijke atomen zijn stikstof (bijv. in aminozuren), zuurstof en ijzer (een belangrijk atoom in hemoglobine in ons bloed).

Na de Big Bang bestond het gas in het heelal voor ongeveer 90% uit waterstofatomen en 10% helium, plus wat restmateriaal van lithium en beryllium. Er was geen koolstof, stikstof, zuurstof, of ijzer. Waar komen deze elementen vandaan?

Het antwoord is: ze zijn gevormd in de kernen van sterren en gedurende supernova-explosies. (Zie ook DE LEVENSLOOP VAN STERREN) Deze elementen komen pas vrij als ze door supernova's de ruimte ingeslingerd worden met hoge snelheden: Wij bestaan zelf voor een groot deel uit materiaal gemaakt in supernova explosies!

Vergelijk je de elementen geproduceerd door Type Ia supernova's en alle ander supernova's dan zie je dat hun belangrijkste producten de elementen tussen koolstof (element 12) en ijzer (element 26) zijn, maar supernova's van zware sterren produceren voornamelijk zuurstof, neon, en magnesium, terwijl exploderende witte dwergen (Type Ia) voornamelijk ijzer produceren. Dit ijzer is gevormd als radioactief ^{56}Ni.

Uit het voorgaande kun je concluderen dat wijzelf tot op zekere hoogte supernovarestanten zijn; overblijfselen van ontplofte sterren. In het algemeen noemen we echter supernovarestanten dat wat voor zo'n 100.000 jaar te zien is nadat een supernova heeft plaatsgevonden.



Figuur 14: Links: Een explosie in de lucht afkomstig van een geweerschot en gefotografeerd met een snelle camera. De luide knal die je hoort is de schokgolf. Deze schokgolf wordt snel na explosie bolvormig, ondanks het feit dat de energie aanvankelijk maar in één richting wordt gelanceerd. Wat deze foto ook mooi laat zien is dat zich binnen in de schok kruitdampen bevinden. Een supernovarest heeft min of meer dezelfde structuur.
Rechts: De supernovarest van SN 1572 (die gezien is door Tycho Brahe). De afbeelding laat de röntgenstraling zien van verschillende golflengten. Groen correspondeert met silicium en rood

met ijzer. De schokfront in deze afbeelding is duidelijk gemarkeerd door een blauw/ paarsige gloed.

4.2 Explosies en schokken

Een supernova is een explosie van een ster. Het is dus vergelijkbaar met een bomexplosie op aarde, alleen velen malen krachtiger. Bovendien gaat de explosie af in bijna vacuüm. De dichtheid van het gas in ons melkwegstelsel is 1 deeltje per cm^3 ($\rho \approx 10^{-21}$ kg m^{-3}). Op aarde is de dichtheid van de lucht $\rho \approx 1{,}29$ kg m^{-3}.

Een kenmerk van een schok is dat die zich verplaatst met een snelheid groter dan van geluidsgolven. De schok verhit inkomend gas. Je kunt ongeveer schatten hoe heet het schokverhitte gas wordt door je in gedachten te verplaatsen naar de situatie zoals die *in de schok* is. Het ongeschokte gas komt dan met grote snelheid (de schoksnelheid v_s) de schok binnen. Alle gasdeeltjes voor de schok hebben een snelheid v_s.

Wat de schok doet is die energie per deeltje behouden, maar de gasdeeltjes worden in alle richtingen verstrooid door botsingen met het al verhitte gas achter de schok. Dat gas achter de schok plant zich ook voort, maar met een snelheid minder dan de schoksnelheid. Je kunt zeggen dat de gerichte beweging van de schok omgezet wordt in een willekeurige beweging. Omdat de temperatuur van een gas wordt bepaald door de energie van de willekeurige bewegingen van de gasdeeltjes, verwachten we dat $kT = \frac{1}{2}mv_s^2$, met m de massa van een gasdeeltje. Een preciezere berekening, die ook rekening houdt met de eigenschappen van het gas laat zien dat niet alle kinetische energie in warmte wordt omgezet, waardoor de correcte formule is:

$$kT = \frac{3}{16} < m > v_s^2 \qquad (3)$$

met $< m >$ de gemiddelde deeltjesmassa. Voor interstellair gas is $< m > \approx 0{,}6\ m_p$, met m_p de protonmassa.

Opgave 9: De gemiddelde massa per gasdeeltje

Het interstellair gas bestaat rond supernova's grotendeels (90%) uit geïoniseerd waterstof gas (atomair, dus niet H_2) en geïoniseerd helium (10%). Waarom is $< m > \approx 0{,}6\ m_p$?

Opgave 10: De gastemperatuur in een supernovarestant

Bereken de gastemperatuur achter een schok met een snelheid van v_s = 1.000 km/s.

4.3 De structuur en evolutie van een supernovarestant

Net zoals het geweerschot in fig. 14 bestaat een supernovarestant uit een schil van geschokt gas en uit materiaal van de explosie zelf (supernovamateriaal = kruitdampen). In jonge supernovarestanten kun je eigenlijk drie gebieden onderscheiden, van buiten naar binnen: 1) geschokt interstellair gas; 2) geschokt supernovamateriaal (groen en rood in fig. 14); 3) ongeschokt supernovamateriaal dat na de supernova-explosie zelf afgekoeld is door de snelle expansie.

Naarmate de tijd verstrijkt raakt steeds meer van het koude supernovamateriaal verhit doordat het geschokt gebied ook naar binnen uitdijt. Tegelijkertijd wordt de schok steeds groter en raakt dus steeds meer interstellair gas geschokt: het raakt verhit en wordt in beweging gezet.

Het is duidelijk dat, zelfs als er geen energie verloren gaat, de supernovarest steeds langzamer gaat bewegen, omdat meer en meer gas verhit wordt en in beweging wordt gezet. De Russische natuurkundige Sedov heeft laten zien dat als het gas homogeen verdeeld is dat de schokstraal bepaald wordt door de tijd sinds de explosie t, de energie E van de explosie en dichtheid ρ van het het gas:

$$r_s = \left(2.002\frac{Et^2}{\rho}\right)^{2/5} \qquad (4)$$

Deze formule is geldig als er geen verdere energieverliezen optreden. Bovendien moet de opgeveegde gasmassa groter zijn dan de gasmassa die door de supernova weggeslingerd is.

Opgave 11: De toename van massa in een supernovarest

Stel dat we een supernovaschil zien ter grootte van 15 pc, en dat de gemiddelde dichtheid 1 waterstofatoom per cm^3 bedraagt.

- Hoeveel massa (in $M_\odot$) heeft de schok dan opgeveegd?
- Wat overheerst in deze supernovarestant: materiaal van de ster of opgeveegd interstellair gas?

Opgave 12: De evolutie van de snelheid

Laat zien dat vergelijking 4 betekent dat voor de schoksnelheid geldt:

$$v_s = \frac{2}{5}\frac{r_s}{t} \qquad (5)$$

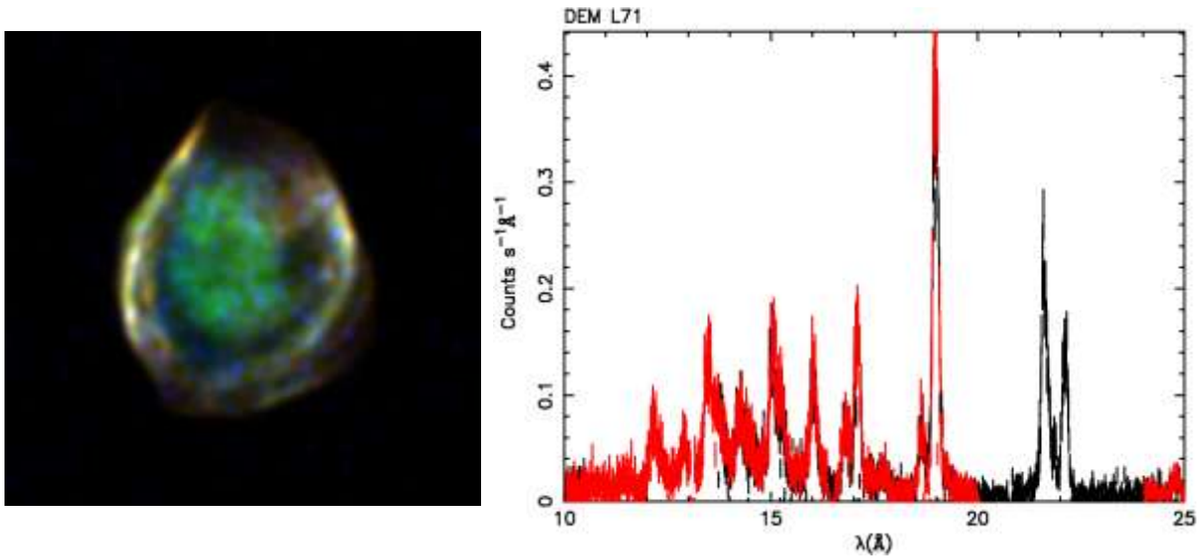
4.4 Röntgenstraling

Zoals uit het antwoord op opgave 10 blijkt is het gas achter de schok zeer heet, afhankelijk van de snelheid $T \sim 10^6$-10^8 K. Bij deze temperaturen straalt gas röntgenstraling uit. Je kunt dit als volgt inzien. Stel dat de elektronen een temperatuur hebben van $T = 10^7$ K. Dit betekent dat een gemiddelde elektron een energie heeft van $\frac{1}{2}m_e v_e^2 = kT = 1{,}38.10^{-16}$ J.
Stel dat een elektron die energie kwijtraakt door een botsing met een ander deeltje, waarbij in het maximale geval al z'n energie omgezet wordt in een foton. Volgens de formule $E_{ph} = h\nu = hc/\lambda$, met h de constante van Planck, kunnen we nu de frequentie ν of golflengte λ uitrekenen: $\nu = 1{,}38.10^{-16}/h = 2{,}1.10^{17}$ Hz, λ = 1,44 nm. Licht met deze frequentie/golflengte is röntgenstraling.

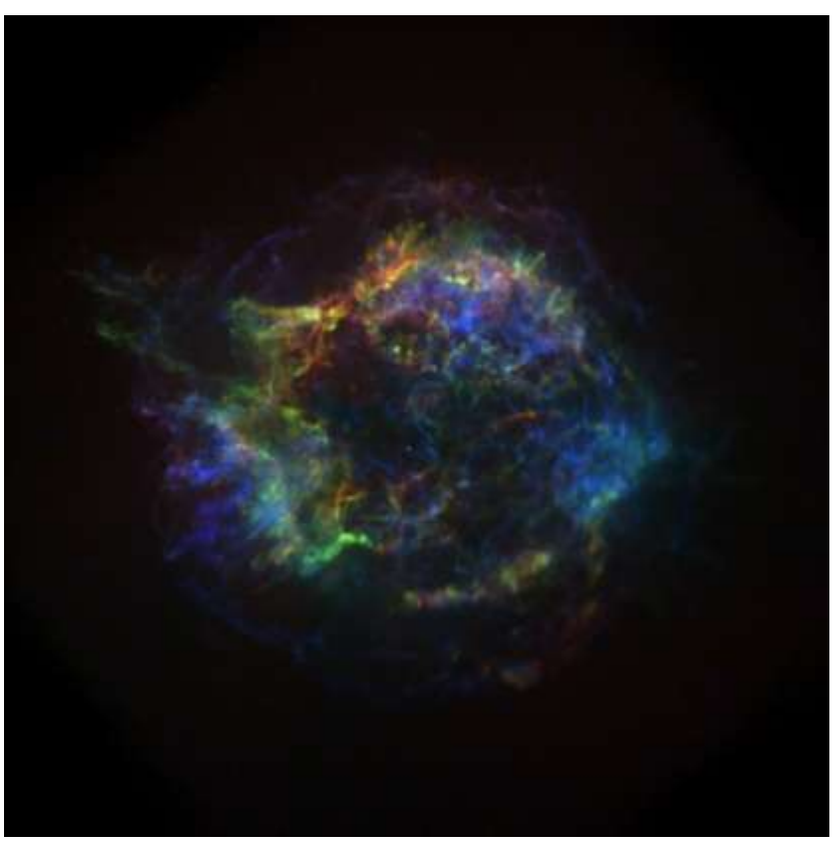
Nu zijn er twee belangrijke manieren waarop zo'n energie omzetting kan plaatsvinden: 1) een elektron botst met een ion en buigt af en zet een deel van zijn kinetische energie om in een foton; 2) een elektron botst met een ander elektron dat zich in een atoom bevindt, dit elektron krijgt meer energie en gaat naar een ander energieniveau in het atoom, vervolgens gaat dit elektron weer terug naar zijn oude niveau en zendt het verschil in energie uit in de vorm van een foton[7].

In geval 1) kan het foton elke willekeurige energie hebben met een maximum van de energie van het elektron. Met andere woorden er is een continuüm aan fotonenergieën. In geval 2) zorgen de nauw bepaalde toegestane overgangen van elektronen in atomen (kwantumsprongen) ervoor dat alleen fotonen met alleen zeer nauw bepaalde energieën uitgezonden worden. Dit geeft aanleiding tot lijnstraling en kan zowel gezien worden in optische spectra als in röntgenspectra. Die lijnen zijn zeer specifiek voor het ion. In plasma's met temperaturen van $10^6 - 10^8$ K zijn waterstof en helium volledig geïoniseerd: de atomen zijn kaal, hebben geen elektronen meer bij zich. De lijnen die je in deze hete plasma ziet zijn dus typisch elementen zoals zuurstof, neon, silicium en ijzer, die al veel elektronen kwijt zijn, maar toch nog enkele elektronen over hebben. Bijvoorbeeld bij λ = 190 nm kan er lijnstraling optreden van 7 maal geïoniseerd zuurstof; dit is dus een zuurstofion met nog maar 1 elektron. Een andere spectrale lijn die veel waargenomen wordt is bij λ = 18,5 nm, deze lijn is afkomstig van 24 maal geïoniseerd ijzer. Een voorbeeld van een röntgen lijnenspectrum is te zien in fig. 15.

[7] Overgangen van elektronen naar hogere energieniveaus (excitatie) kan door twee oorzaken plaatsvinden: absorptie van een foton met de juiste energie, of door botsing met een ander deeltje. In supernovarestanten komen voornamelijk excitaties door botsingen met elektronen voor.



Figuur 15: Links: De supernovarest DEM L71, in de Grote Magellaense Wolk (Fig. C.2) zoals waargenomen met de Chandra röntgensatelliet. De kleur groen correspondeert met spectraallijnen van ijzer. De hoeveelheid ijzer in het centrum laat zien dat het hier om een supernovarestant van een Type Ia (witte dwerg) supernova gaat. Rechts: Het lijnenspectrum van DEM L71 zoals waargenomen met de Europese XMM-Newton satelliet. De lijnen rond 18.5 Å en 22 Å zijn afkomstig van 7 maal en 6 maal geïoniseerd zuurstof. De meeste andere lijnen zijn afkomstig van ijzer.



Figuur 16: Een afbeelding van Cassiopeia A gemaakt met behulp van de *Chandra* telescoop. De verschillende kleuren laten hete gassen zien die veel zuurstof (rood), silicium (groen) en ijzer (blauw) bevatten. Deze gassen zijn afkomstig van de supernova zelf en in het geval van silicium en ijzer grotendeels gevormd vlak voor of tijdens de supernova-explosie. In het midden van Cassiopeia A is een klein puntje zichtbaar, dit is zeer waarschijnlijk de neutronenster gevormd door de implosie van een zware ster.

De tegenwoordige röntgentelescopen, die zich buiten de aardse dampkring in satellieten bevinden, hebben een redelijk groot ruimtelijk oplossend vermogen (resolutie). Zo kan NASA's *Chandra* satelliet details waarnemen met een hoekresolutie van 0.5", dit correspondeert met het zien van details van 1 cm van een afstand van 4 km! [8]

Het supernovarestant dat het best onderzocht is in het röntgen is Cassiopeia A. Dit is het restant van een supernova die rond 1672 afgegaan moet zijn, maar vreemd genoeg door niemand is opgemerkt. Op dit moment is Cassiopeia A de helderste radiobron aan de hemel, maar ook in röntgenlicht is Cassiopeia A zeer helder. De *Chandra* telescoop heeft 12 dagen lang deze supernovarestant bekeken om zoveel mogelijk details te vergaren. Het resultaat is te zien in fig. 16.

4.5 Optische emissie van supernovarestanten

Vergelijking 4 laat zien dat de schoksnelheid steeds meer afneemt. Nu blijkt gas zeer snel te koelen voor temperaturen tussen10^4 – 10^6 K, dus oudere supernovarestanten (> 5.000 jaar) verliezen vrij snel energie, en waar dit het geval is begint het gas juist meer te stralen in optisch licht. De koeling gebeurt niet gelijkmatig, maar vaak juist in filamentachtige structuren (slierten), zoals mooi te zien is in fig. 17.

4.6 Supernovarestanten met en zonder neutronensterren

In sectie 3.1 heb je kunnen lezen dat supernova's van zware sterren ontstaan door de implosie van een sterkern tot een neutronenster. Je verwacht dus dat de supernovarestanten van deze supernova's in het midden een neutronenster laten zien. In veel supernovarestanten bevinden zich inderdaad neutronensterren. Nu blijkt er een grote diversiteit te zijn in de helderheid van neutronensterren. Dit hangt samen met hoe jong ze zijn, hoe groot hun magneetveld is en hoe snel ze roteren.

Vlak na de implosie zijn neutronensterren zeer heet. Voor miljoenen jaren blijven ze daardoor nagloeien. Hoe jonger ze zijn des te heter. Als ze heet genoeg zijn aan hun oppervlak (> 10^6 K) dan stralen ze röntgenlicht uit, zoals de neutronenster in Cassiopeia A (fig.16). Snelroterende neutronensterren met een hoog magneetveld fungeren als een soort kosmische dynamo's. Ze produceren radiostraling in een nauwe bundel, die als die bundel over de aarde scheert gezien kunnen worden met radiotelescopen, zoals die in Westerbork.

Zulke neutronensterren worden pulsars genoemd. Bovendien produceren ze elektronen met zeer hoge energieën, die de ruimte rond de pulsar vult en door hun hoge energie een soort wind vormen. Doordat de elektronen afgebogen worden in het magneetveld rond de pulsar produceert zo'n wind radiostraling. Als de elektronen zeer hoge energieën hebben kunnen ze zelfs zichtbaar zijn in het optisch licht of in röntgen.

[8] Een boogseconde (symbool ") is 1/3600 van een graad.

Pulsars met zo'n wind van energetische elektronen noemen we een "pulsar-windnevel". Die vinden we vooral rond zeer snelroterende pulsars met een hoog magneetveld. De krachtigste pulsarwindnevel die we kennen is de "Krabnevel". De Krabnevel is een combinatie van een supernovarestant en een pulsarwindnevel, waarbij de pulsarwindnevel overheerst. De windnevel is zichtbaar in radio-, optische-, en röntgenstraling en is op de foto lichtblauw. De pulsar zelf heeft een rotatieperiode van 33 ms.

Figuur 18: Een afbeelding gemaakt met de Hubble Space Telescope van de supernovarestant N49 in de Grote Magelhaense Wolk .

5 Afsluiting

We begonnen dit hoofdstuk met de volgende vraag:

Wat zijn supernova's en wat blijft er van ze over?

Kijk eens terug op het hoofdstuk aan de hand van de volgende punten:

- Welke antwoorden heb je gevonden op de centrale vraag?
- Wat zou je nog willen onderzoeken, als je er de tijd voor had?

Zwarte gaten

1 Inleiding

De delen over compacte sterren en supernova's gaan over hoe sterren aan het eind van hun leven de strijd tegen de zwaartekracht overwinnen door erg compact te worden. In sommige gevallen is de tegendruk niet meer in staat de zwaartekracht genoeg tegen te werken om de ster in evenwicht te houden. De ster stort dan in. De strijd tegen de zwaartekracht is definitief verloren en er ontstaat een zwart gat.
Maar wat is dat eigenlijk, een zwart gat? Daarover gaat dit deel.

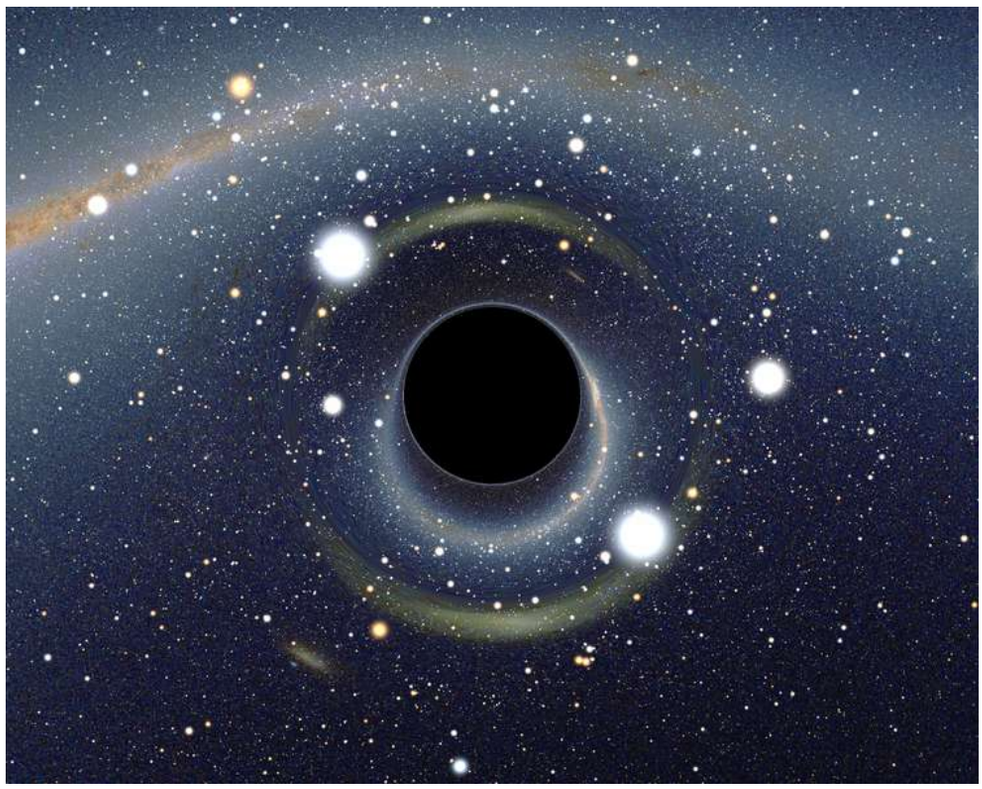
Wat zijn zwarte gaten en hoe gedragen ze zich?

De volgende opdrachten helpen je om goed voorbereid aan dit deel te beginnen.

Opgave 1: Wat heb je nodig?

Zoek de volgende dingen op.

- De formule voor de gravitatiekracht tussen twee voorwerpen.
- De formules voor kinetische energie en gravitatie-energie.
- De formule voor middelpuntzoekende kracht in een cirkelbeweging.
- De grootte van de lichtsnelheid.
- De energie van een foton.
- De grootte en massa van de verschillende types sterren die je bent tegengekomen in de eerdere delen van dit boek.



Figuur 1: Simulatie van een zwart gat dat voor de Magelhaense wolk langs beweegt.

Opgave 2: Gravitatiekracht: zwak maar toch machtig

Er wordt wel gezegd dat de gravitatiekracht heel zwak is. Maar ook, dat in het heelal de gravitatiekracht oppermachtig is. Hoe kan dat? Daarover gaat deze opgave.

We kennen vier fundamentele krachten in de natuurkunde: de gravitatiekracht en de elektromagnetische kracht (elektrische en magnetische krachten worden als een enkele kracht beschouwd) en de zwakke en sterke kernkrachten. Die laatste zijn eigenlijk alleen in atoomkernen en tussen elementaire deeltjes belangrijk en doen op grotere afstanden niets.

a Schrijf de formules voor de gravitatiekracht en de Coulombkracht (dat is een eenvoudige vorm van de elektromagnetische kracht) op.

b Wat is de overeenkomst tussen beide formules?

c Schrijf de waarden op van de constanten in de twee krachten. Wat concludeer je over de sterkte van de zwaartekracht vergeleken met die van de elektromagnetische kracht?

d Hoe groot zijn massa, lading, en onderlinge afstanden van gewone 'aardse' voorwerpen ongeveer? Geef alleen ordes van grootte. Hoe groot zijn dan de elektrische en gravitatiekrachten tussen zulke voorwerpen?

e Waarom speelt de elektrische kracht geen belangrijke rol bij de wisselwerking tussen hemellichamen?

f Dezelfde vraag voor 'buitenaardse' voorwerpen zoals sterren en gaswolken. Hoe groot zijn massa, lading en onderlinge afstanden daar? Hoe groot zijn dan de elektrische kracht en gravitatiekracht tussen zulke voorwerpen?

g Kun je nu begrijpen dat voor sterrenkundigen gravitatie een heel belangrijke kracht is?

2 Wat is een zwart gat?

Een zwart gat heet 'zwart' omdat er geen licht vanaf komt: de gravitatiekracht van het gat is zo groot, dat niets eraan kan ontsnappen, zelfs licht niet. Hoe is dat mogelijk?

2.1 Wat is ontsnappen aan de gravitatiekracht?

Bij de lancering van een ruimtecapsule geeft de stuwraket de capsule een snelheid mee. Bij voldoend grote snelheid kan de capsule bijvoorbeeld naar de maan. Maar daarmee is de capsule nog niet ontsnapt aan de gravitatie van de aarde. De maan draait immers rondjes om de aarde waarbij de gravitatiekracht van de aarde dienst doet als middelpuntzoekende kracht.

Stel je nu voor dat de ruimtecapsule zo ver weg gaat, dat de gravitatie van de aarde (vrijwel) nul is. En dat er geen andere objecten zijn (zoals de maan, de zon, andere sterren) die elk ook weer een gravitatieveld hebben. Welke snelheid moet de capsule bij de lancering dan meekrijgen? Die snelheid heet de *ontsnappingssnelheid* van de aarde en is 11,2 km/s. De zon heeft een sterker gravitatieveld dan de aarde en de ontsnappingssnelheid van de zon is dus groter (618 km/s), terwijl die van de maan juist kleiner is (2,4 km/s).

Hoe sterker de aantrekkingskracht, hoe groter de snelheid die je minstens moet hebben om aan die kracht te kunnen ontsnappen. Een zwart gat, waar niets uit weg kan, moet dus wel een heel grote ontsnappingsnelheid hebben. Maar hoe groot is groot genoeg? En hoe krijg je dat voor elkaar?

Gravitatiekracht en gravitatie-energie

Isaac Newton benoemde in de 17e eeuw voor het eerst de gravitatiekracht en zei dat massa een kracht op afstand uitoefent die evenredig is met de grootte van de massa en ("de omgekeerde kwadraat wet") afneemt met het kwadraat

van de afstand *r*. 10 keer verder weg en die kracht is 10^2 = 100 keer zwakker. De grootte van die kracht *F* wordt bepaald door een constante, de gravitatiekrachtconstante van Newton, meestal *G* genoemd, die de koppeling tussen materie en gravitatiekracht vastlegt. Een massa *m* die op een bol materie (ster, aarde) ligt met massa *M* en straal *R* ligt, wordt aangetrokken met een kracht (alsof alle massa binnen *R* in één punt in het centrum gedacht kan worden)

$$F = \frac{GMm}{R^2} \qquad (1)$$

Figuur 2: Heuvelafwaarts neemt de kinetische energie toe.

Doordat de gravitatiekracht een aantrekkende kracht is, zitten wij aan de aarde gebonden. Anders gezegd: het "kost energie" (je moet arbeid leveren) om tegen de gravitatiekracht in omhoog te bewegen, zoals iedere fietser van bergetappes merkt. Heuvelafwaarts komt de potentiële energie weer vrij in de vorm van toenemende kinetische energie, dus een toenemende snelheid. Deze energie heet energie van plaats of potentiële energie (of gravitatie-energie), omdat hij afhankelijk is van de plaats in het gravitatieveld. De formule voor gravitatie-energie ken je al:

$$E_{\mathrm{gr}} = F_{\mathrm{gr}}h = mgh \qquad (2)$$

Maar let op: dit geldt alleen zolang de versnelling *g* over de afstand *h* niet verandert.

De versnelling van de gravitatiekracht *g* vind je door in de ene wet van Newton de andere in te vullen: *F* = *mg* met de gravitatiekracht van Newton volgens vergelijking 1. Dan valt de massa *m* weg en is de versnelling van de gravitatiekracht *g* (op aarde bijvoorbeeld, met *M* massa aarde en *R* straal aarde)

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad (3)$$

Hoger boven de aarde (grotere *r*) is de gravitatiekracht kleiner, je kunt dus niet eenvoudig de potentiële energie uitrekenen door kracht maal afstand te nemen.

Het blijkt dat de gravitatie-energie E_{gr} van een massa *m* het volgende oplevert: op een afstand gegeven door straal *R* van een bol met massa *M* is

$$E_{\mathrm{gr}} = -\frac{GMm}{R} \qquad (4)$$

Deze energie is negatief en neemt toe (wordt minder negatief) bij toenemende *R*.

Op hele grote afstand *r* is de gravitatie-energie nul (omdat $1/r \to 0$ voor $r \to \infty$). Dan is de massa vrij, ongebonden, buiten de invloed van de gravitatiekracht. Voor de potentiële energie, dus in het bijzonder voor gravitatie-energie, doet eigenlijk alleen het verschil in die energie tussen twee plekken ertoe. Je kunt dus kiezen waar je $E_{gr} = 0$ wil hebben, door een constante op te tellen bij de potentiële energie. Die valt in het verschil immers toch weg. We kiezen die constante meestal zo, dat de potentiële energie op grote afstand ($r \to \infty$) nul is.

Extra: berekenen van de potentiële energie op afstand R

Om de potentiële energie te berekenen moet je de kracht over de afstand integreren (over afstanden dr in kleine beetjes optellen). Energie is kracht maal afstand. Tussen r en $r + dr$ is de kracht $-GMm/R^2$ en de afstand dr(de kracht is negatief omdat die naar het middelpunt toe is gericht en dr van het middelpunt vandaan is gericht). Dit integreren we tussen $r = R$ en $r = \infty$; gebruik dat $\int 1/r^2 dr = -1/r$. Dan is

$$E_{gr}(R) = \int_R^\infty \frac{-GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r}\Big|_R^\infty = 0 - \frac{GMm}{R} \qquad (5)$$

Waarom zijn er sterren? We kunnen nu begrijpen waarom er sterren zijn. Sterren ontstaan doordat zwaartekracht altijd aantrekkend is. Dat geldt niet voor de andere drie natuurkrachten. Een ijle gaswolk zal zonder tegenkrachten op den duur samentrekken. Daarbij komt energie vrij (gravitatie-energie). Sterren bestaan omdat de eindtoestand (afzonderlijke sterren in een lege ruimte) een kleinere energie heeft dan de begintoestand (ijle, uitgestrekte gaswolk).

Opgave 3: Waarom zijn sterren zo zwaar?

Om dat te begrijpen kijken we naar de formule voor de gravitatie-energie E_{gr} waarin *G* Newton's gravitatieconstante is. De zwaartekracht is zwak, omdat *G* zo klein is. Stel dat *G* 100 keer zo groot is en de zwaartekracht dus 100 keer sterker is (nog altijd heel veel kleiner dan de andere krachten).

a Hoeveel groter zou dan de massa van een ster worden? Aanwijzing: welke massa heb je nodig om de zwaartekrachtenergie hetzelfde te laten zijn, immers die bepaalt de contractie tot een ster en de bijbehorende temperatuursverhoging in het binnenste.

b De totale energievoorraad in een ster hangt af van de hoeveelheid materie in de ster. Hoeveel kleiner (ruwweg) is de energievoorraad in de ster bij 100 x sterkere zwaartekracht?

c De lichtkracht van de ster bij 100 x sterkere zwaartekracht blijft wel ongeveer hetzelfde. Hoeveel korter leeft zo'n ster dus ongeveer? De zon doet er 10 miljard jaar over voor alle energie op is. Hoe lang zou de zon schijnen bij een 100 x sterkere zwaartekracht?

d Het leven op aarde (ééncelligen) heeft ongeveer 3 miljard jaar nodig gehad om tot eerste ontwikkeling te komen. Zou dat ook het geval zijn in een heelal waarin de zwaartekracht 100 keer zo sterk is?
Deze opgave illustreert dat de grote massa van sterren rechtstreeks samenhangen met de zwakke zwaartekracht en dat er een indirect verband is tussen de zwakke zwaartekracht en het ontstaan van leven.

De ontsnappingssnelheid

Een voetbal is gravitationeel gebonden aan de aarde. Geef je de bal een schop recht omhoog (beginsnelheid v) dan neemt de hoogte toe en de snelheid af. Hoe hard moet je schoppen om uit het gravitatiekrachtveld van de aarde te ontsnappen en de snelheid net tot nul afgenomen is? Beter gezegd: hoe groot moet de beginsnelheid van de voetbal dan minstens zijn? Deze snelheid heet de ontsnappingssnelheid v_{ontsnap}. Het is de snelheid die de ruimtecapsule bij zijn lancering minimaal moet hebben om uiteindelijk helemaal uit het gravitatiekrachtveld van de aarde te ontsnappen. Voor een ruimteveer dat naar een baan om de aarde gaat (bijvoorbeeld naar het International Space Station) geldt een lagere snelheid. Hier komen we nog op terug in vergelijking 14.
Ontsnappen betekent dat de totale energie tenminste nul moet zijn. We hebben immers de gravitatie-energie zo gekozen dat die op oneindige afstand van de aarde nul is, en dichterbij negatief. De totale energie van de satelliet (of wat het ook is dat ontsnapt), kinetische plus potentiële, is dus minstens gelijk aan nul. Je krijgt de grootte van v_{ontsnap} door de som van de kinetische energie en de gravitatie-energie (4) gelijk aan nul te stellen, dus:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnap}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \qquad (6)$$

De massa m van de satelliet valt weg en de ontsnappingssnelheid wordt (we laten het kwadraat even staan)

$$v_{\text{ontsnap}}^2 = \frac{2GM}{R} \qquad (7)$$

Opgave 4: Ontsnappen aan een neutronenster
Bereken de ontsnappingssnelheid voor een compacte ster met een massa van 1 zonsmassa en een straal van 10 km (dat is ongeveer de straal van een neutronenster).

2.2 De ontsnappingssnelheid van een zwart gat

Een van de aannames waarop Einstein zijn Speciale Relativiteitstheorie baseerde is het volgende: **de lichtsnelheid is constant**. Het maakt niet uit hoe snel de bron van het licht beweegt ten opzichte van de waarnemer, in vacuüm beweegt het licht met een snelheid die altijd gelijk is aan $c = 2{,}99792458.10^8$ m/s.

Een van de conclusies van de Speciale Relativiteitstheorie is: **niets gaat sneller dan de lichtsnelheid** *c*. Dit geldt voor alle soorten deeltjes en straling, en is een gevolg van het feit dat de klassieke formule voor de kinetische energie, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, voor heel hoge snelheden niet klopt: de energie neemt veel sneller toe met toenemende snelheid, en om een massa *m* een snelheid *c* te geven is zelfs *oneindig* veel energie nodig.

Stel nu eens dat een ster zo compact is dat de ontsnappingssnelheid (iets) groter is dan de lichtsnelheid. Dan kan niets ontsnappen, omdat niets die snelheid kan halen. De ontsnappingssnelheid hangt af van de massa en straal van de ster volgens vergelijking 7:

$$v_{\text{ontsnap}}^2 = \frac{2GM}{R}$$

Een ster met een massa *M* heeft dus een ontsnappingssnelheid groter dan *c* als voor de straal *R* geldt dat die kleiner is dan

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$ **De Schwarzschildstraal** (8)

Deze straal heet de gravitatiestraal, of ook (naar de ontdekker) de Schwarzschildstraal. Omdat je binnen die straal niets meer kunt waarnemen, heet die grens ook waarnemingshorizon. Een zwart gat is dus een object met een massa *M* en een straal *R* die kleiner is dan de bij die massa behorende Schwarzschildstraal.

De Schwarzschildstraal voor een zonsmassa (invullen van de waarden) levert 3 km op. Persen we de zon (met een straal van 7.10^5 km) samen tot een bolletje met een straal van 3 km, dan hebben we een zwart gat met de massa van die van de zon.

De Schwarzschildstraal is evenredig met de massa. Voor heel kleine massa (bijvoorbeeld een zandkorrel) is *R*s heel klein, en voor superzware zwarte gaten van een miljard zonmassa's, is de Schwarzschildstraal 3 miljard km. (De afstand aarde-zon heet een Astronomische Eenheid AE en is 150 miljoen km, De Schwarzschildstraal van een superzwaar zwart gat is dus 20 AE).

Gravitatiekracht trekt ook aan licht. Misschien heb je je zorgen gemaakt over de vraag of licht echt niet kan ontsnappen aan een zwart gat. De ontsnappingssnelheid hebben we immers gevonden door kinetische en gravitatie-energie van deeltjes te bekijken. En fotonen hebben toch geen massa die wordt aangetrokken door de gravitatiekracht?

Een welbekende conclusie uit Einsteins speciale relativiteitstheorie is

$E = mc^2$. Betekenis: massa is een vorm van energie. Maar ook geldt het omgekeerde: $m = E/c^2$. Massa is equivalent met energie. Een hoeveelheid energie E, bijvoorbeeld een foton, wordt door het gravitatieveld van bijvoorbeeld de aarde een beetje afgebogen, maar slechts onmerkbaar weinig. De gravitatie vlak bij een zwart gat is echter enorm groot.

Dit betekent dat ook het licht niet kan ontsnappen uit een zwart gat. Het heeft ook gevolgen voor hoe we zwarte gaten toch kunnen zien, doordat ze het licht dat in de buurt komt, beïnvloeden. Meer hierover in paragraaf 4.

Opgave 5: Zon en aarde als zwarte gaten

a De Zon heeft een straal 700.000 km en heeft 1 Zonsmassa. Wat is de Schwarzschildstraal van de Zon?

b Een andere ster heeft een straal van 1.000.000 km en ook een massa van 1 Zonsmassa. Verschilt de Schwarzschildstraal van deze ster met die van de Zon? Zo ja, hoeveel dan?

c Als je de zon samenperst tot een zwart gat, hoe verandert dan de aardbaan? (Neem alleen gravitatiekracht-effecten mee in je redenering).

d De gemiddelde dichtheid van de zon is ongeveer gelijk aan die van water, (1.000 kg/m^3). Wat is de compressiefactor voor de zon om deze samen te persen tot een zwart gat? Hoe groot is de dichtheid van de materie op het moment dat de straal van de Zon gelijk is aan de Schwarzschildstraal?

e Vergelijk dit met de dichtheid van materie binnen in atoomkernen (ongeveer 10^{17} kg/m^3). Veel groter, ongeveer vergelijkbaar of veel kleiner?

f De aarde is ruwweg 300.000 keer minder zwaar dan de Zon. Hoe groot is de Schwarzschildstraal van de aarde?

g Hoeveel groter is de factor waarmee je de Aarde moet samenpersen tot een zwart gat vergeleken met de zon?

h De Schwarzschildstraal van een superzwaar zwart gat van 1 miljard zonsmassa's is 3 miljard km. Hoe groot is nu de gemiddelde dichtheid van materie op het moment van passeren van de Schwarzschildstraal?

i Wat valt je op in vergelijking met de vorige gevallen? Kan je een formule geven, hoe de gemiddelde dichtheid (massa gedeeld door volume) bij het passeren van de Schwarzschildstraal schaalt met de massa?

3 Hoe kan een Zwart Gat ontstaan?

Theoretisch kunnen zwarte gaten van iedere massa bestaan. Pers een zandkorrel van 20 microgram ineen tot afmetingen kleiner dan zijn Schwarzschildstraal (waanzinnig klein, 10^{-34} m) en je hebt een zwart gat. Men noemt dat een **micro zwart gat** en het is niet duidelijk of die ook bestaan. Op die schaal, die de **Planck-afstand** heet, kennen we de natuur helemaal niet en is onze natuurkunde niet van toepassing. De theoretisch natuurkunde is naarstig opzoek naar een goede beschrijving.

Het is een gekke gedachte dat de gravitatiekracht van een voldoende ver samengeperste zandkorrel even groot is (namelijk gekenschetst door een ontsnappingssnelheid gelijk aan de lichtsnelheid) als een zwart gat met de massa van de zon, of als een superzwaar zwart gat van 3 miljard zonmassa's dat zich schuil houdt ergens in het centrum van een melkwegstelsel. Dat komt allemaal omdat in de gravitatiekrachtwet (zoals vgl. 1) de factor $1/r^2$ voor kleine r onbeperkt groot kan worden (ook bij kleine massa) als $r \to 0$. Er zijn in de natuur tot nu toe twee manieren bekend waarmee zwarte gaten gevormd kunnen worden.

3.1 Stellaire zwarte gaten

Sterren storten in aan het eind van hun leven, als alle energie is opgebrand. Zware sterren kunnen geen nieuw evenwicht vinden als kleine compacte ster. In de kern van de instortende ster overheerst de tot verder samenballen neigende gravitatiekracht. Er is onvoldoende tegendruk om die tegen te gaan. Er wordt een stellair zwart gat gevormd met een massa van een paar keer die van de zon. Als de kern zwaarder is dan de maximum massa van neutronen sterren, kan er geen neutronenster ontstaan en kan de ster alleen verder ineenstorten tot de vorming van een zwart gat met een verwachte massa van 3 tot 10 keer de massa van de zon.

3.2 Superzware zwarte gaten

De andere manier vindt plaats door botsingen van sterren en gas in het centrum van sterrenstelsels zoals onze Melkweg. Een sterrenstelsel is een kluit van miljarden tot honderden miljarden sterren. Onze Melkweg (een redelijk grote) heeft ongeveer 200 miljard sterren. In het centrum worden superzware zwarte gaten gevormd met massa's van een paar miljoen tot een miljard keer een zonsmassa.

In melkwegstelsels (sterrenstelsels), zoals onze Melkweg, draaien sterren een cirkelvormige baan om het centrum. Ze hebben impulsmoment (hoeveelheid van draaibeweging) en dat is zonder extra krachten een behouden grootheid. Onderlinge botsingen van sterren zijn uiterst zeldzaam omdat sterren zo klein zijn t.o.v. hun onderlinge afstand (daarom zien we sterren als een

puntje). Sterren kunnen dus zonder interacties rond blijven draaien.

We zien nabije melkwegstelsels soms zo groot als een paar volle manen aan de hemel. Sterrenstelsels hebben dus een grotere kans op botsen met elkaar dan individuele sterren, zeker in het verleden, toen het expanderende heelal nog een grotere dichtheid had. Bij botsingen met ander melkwegstelsels kunnen gas en sterren hun impulsmoment verliezen en daardoor vallen ze geleidelijk naar het centrum toe. Daar hoopt zich een grote hoeveelheid massa op, die alleen maar verder ineen kan storten tot een zwart gat.

Opgave 6: Grote en kleine zwarte gaten

Bereken R_s van een zandkorrel, jezelf, de Melkweg,. . .

Opgave 7: Een zwart gat door een botsing

We bekijken twee sterren of sterrenstelsels die botsen. Voor de botsing zijn ze even groot en met dezelfde massa, en hun straal R is groter dan de Schwarzschildstraal. Na de botsing is er één object over (ster of stelsel) met dezelfde dichtheid als de twee originele objecten.

a Hoe groot is de straal van het nieuwe object, vergeleken met de straal R van de originelen?

b Kan dit nieuwe object een zwart gat zijn? D.w.z. kan deze straal kleiner zijn dan de Schwarzschildstraal?

---

4 Hoe kun je een zwart gat zien?

Van een zwart gat komt (per definitie!) geen licht af, dus we kunnen zwarte gaten alleen indirect waarnemen: door de effecten die het heeft op zijn omgeving. Zo heeft de enorm sterke gravitatiekracht invloed op sterren in de buurt van het gat, en zelfs op het licht dat in de buurt is.

4.1 Effect van de gravitatiekracht op licht

De theorie over de gravitatiekracht van Newton zegt niets over licht en houdt geen rekening met de lichtsnelheid als maximumsnelheid[1].

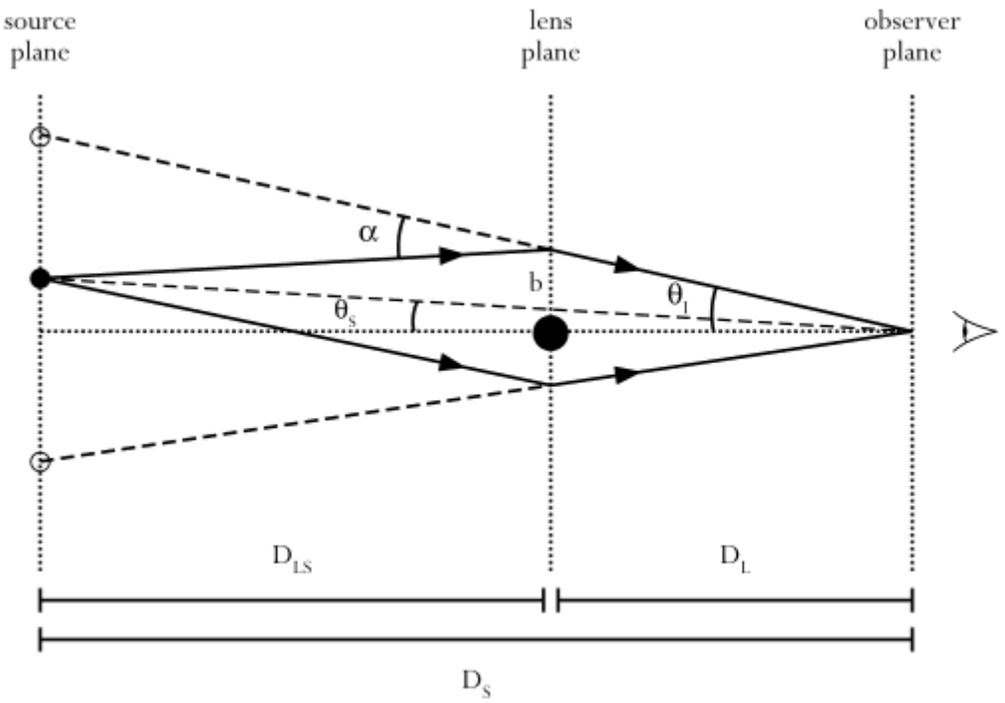
In Newton's tijd en lange tijd daarna was het niet duidelijk hoe licht (en in het algemeen elektromagnetische straling) zich in een gravitatieveld gedraagt. Voor een materiedeeltje geldt dat het een kleinere snelheid krijgt als je het bijvoorbeeld vanuit het oppervlak van de aarde omhoog gooit. Het deeltje verliest op die manier bewegingsenergie.

Volgens de relativiteitstheorie van Einstein geldt dit niet voor een lichtdeeltje (foton) dat omhoog wordt uitgezonden. Want die theorie zegt dat de

[1] Het hele idee van "Kracht op afstand" komt op de schopstoel. Hoe zou bijvoorbeeld de gravitatiekracht van de zon gericht zijn? In de richting waarin wij de zon zien? Of in de richting waar de zon stond toen het licht dat wij nu zien daar acht minuten geleden vertrokken was? (De afstand aarde-zon is ongeveer 8 lichtminuten.)

lichtsnelheid in vacuüm altijd constant is. Maar er moet wel iets anders aan de hand zijn, want de gravitatie-energie van het foton neemt af, net als bij een omhoog geworpen steen. Dus de energie van het foton moet afnemen.

Zoals je weet wordt de energie van een foton bepaald door de frequentie (aantal trillingen per seconde). Als *f* de frequentie is van de straling, dan is de energie *E* van een foton evenredig met de frequentie. De evenredigheidsconstante is de constante van Planck *h*, dus $E = hf$. Het antwoord op de vraag



Figuur 3: De Einsteinring. In deze schets ontstaan twee beelden, een binnen de Einsteinring en een erbuiten.

hoe een foton minder energie krijgt moet dus zijn: doordat het langzamer gaat trillen of (wat hetzelfde[2] is) doordat het licht een langere golflengte krijgt: bijvoorbeeld een “groen” foton zien we in de richting van rood verschuiven. Dit effect heet de gravitatieroodverschuiving en is een belangrijke consequentie van iedere complete gravitatiekrachttheorie waarin zowel licht als materie een rol speelt. Alle moderne gravitatiekrachttheorieën (waarvan de Algemene Relativiteit de belangrijkste is) voorspellen dit effect.

Een trillend foton kan je zien als tikkende klok. Iets (een elektrisch veld) slingert om de evenwichtstoestand, zoals ook in een slingeruurwerk. Officieel is een seconde in het Internationale Systeem van Eenheden ook gedefinieerd als een gegeven aantal perioden in een speciaal soort straling van een Cesium atoom.

Uitgedrukt in het tikken van klokken heet hetzelfde effect de *gravitatietijddilatatie* (dilatatie is een woord uit het Latijn dat “verwijden, vergroten” betekent). Kijken we op grote hoogte, bijvoorbeeld boven in een torenflat, naar een klok op de begane grond dan zien we die langzamer tikken dan iemand die gelijkvloers naar de klok kijkt. Dieper in het gravitatiekrachtsveld (begane grond) loopt de tijd langzamer dan op de hoogste verdieping en dat blijkt concreet als je de klokken uit de verschillende verdiepingen na enige tijd naast elkaar vergelijkt. Op aarde scheelt het een kleine fractie van een seconde op

[2] de frequentie *f* en de golflengte λ hangen immers samen via de voortplantingssnelheid *c* volgens $\lambda = c/f$.

een mensenleeftijd, dus verhuizen is niet meteen noodzakelijk. Het kleine effect is niettemin nauwkeurig gemeten in een toren van 10 meter hoog. Nabij compacte sterren is dit effect veel groter. De zwaarkrachtroodverschuiving komt bovenop de roodverschuiving die we waarnemen als gevolg van de snelheid van de bron van licht, het Dopplereffect.

Afbuiging van licht

Theoretisch kun je een zwart gat zien door de afbuiging van licht van een achterliggende ster. Als ster, lens (zwart gat) en waarnemer precies op één lijn liggen buigt licht in alle richtingen af en ontstaat een ring: de Einsteinring, zie fig. 3. In onze Melkweg zal een toevallig passerende achterliggende ster (kleine kans, maar heel veel sterren!) typisch in een halve dag of zo passeren. De som van de beelden hebben een grotere intensiteit dan de ster zonder lenswerking. Je kunt het effect dus zien als een toename van de totale lichtintensiteit. De afzonderlijke beelden liggen te dicht bij elkaar om onderscheiden te kunnen worden. Dit heet de microlenswerking. Er zijn een paar van dit soort gebeurtenissen waargenomen, maar er was te weinig over de onderlinge afstanden bekend om conclusies te trekken.

De horizon

De (denkbeeldige) bol om een zwart gat met straal ter grootte van de Schwarzschildstraal noemen we de (waarnemings)horizon van het zwarte gat. Er gebeuren daar namelijk drie bijzondere dingen.

Oneindige roodverschuiving bij de Schwarzschildstraal

Het blijkt dat de gravitatiekrachtroodverschuiving steeds groter wordt naarmate je dichter bij de Schwarzschildstraal komt en formeel oneindig groot zou worden als je de Schwarzschildstraal bereikt. Dat betekent dat je vanuit de aarde kijkend naar een instortende ster, de ster steeds roder ziet worden naarmate hij dichter bij de Schwarzschildstraal komt. Als de ster die afstand bereikt heeft, dan is hij onzichtbaar geworden door de steeds toenemende roodverschuiving.

Vertraging van de tijd bij de Schwarzschildstraal

Maar ook de gravitatietijddilatatie wordt steeds groter, gezien vanaf de aarde naarmate de ster dichter bij de Schwarzschildstraal komt. We zien de tijd op het oppervlak van de instortende ster (en van een meevallende waarnemer) steeds langzamer gaan en tenslotte stoppen als de ster de Schwarzschildstraal bereikt. De oude naam voor zwart gat is dan ook bevroren ster.

Afname van de lichtintensiteit

De hoeveelheid straling die wij zien, is een gegeven aantal fotonen per tijdseenheid. Maar met een oprekkende tijd, wordt het interval tussen opeenvolgende fotonen steeds langer. De intensiteit neemt in hoog tempo af, naarmate de ster dichter bij de Schwarzschildstraal komt en is nul als de ster

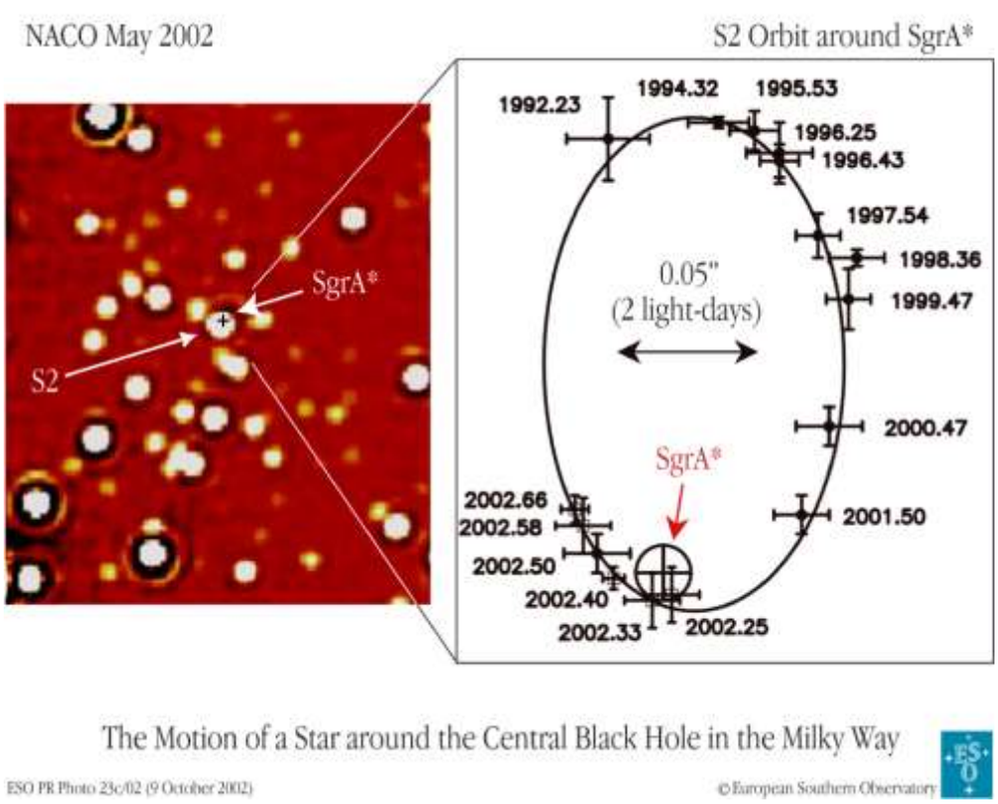
de Schwarzschildstraal bereikt. Samen met de roodverschuiving maakt dit dat we de ster die grens nooit zien passeren.

4.2 Iets draait om niets

Een goed voorbeeld is het zware zwarte gat in het centrum van onze Melkweg. (Zie fig. 4). Een ster draait om een grote massa van bijna 3 miljoen keer die van de zon, terwijl daar niets te zien is. Er zit daar dus een zwart gat van drie miljoen zonmassa's. Dit is het beste bewijs voor het bestaan van een zwart gat. Drie miljoen zonmassa's in een klein volumetje kun je niet anders verstoppen. Het licht zou anders waargenomen moeten worden.

De afstand van de ster tot het centrum van de Melkweg is ong. 1.000 AE. De ster heeft een periode van slechts 15 jaar (ter vergelijking: de zon draait in 200 miljoen jaar rond het centrum van de Melkweg). De snelheid v van een sterretje met een massa m op afstand R in cirkelvormige baan rond een massa M volgt uit het gelijkstellen van de centripetale kracht mv^2/r nodig voor de cirkelbeweging aan de gravitatiekracht (1) volgens Newton:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \qquad (9)$$



Figuur 4: Een zwart gat waargenomen doordat iets (de ster S2) draait om "niets" in het centrum van onze Melkweg. Uit de periode en de halve lange as van de baan kun je afleiden dat de massa van het gat ongeveer 3 miljoen keer de massa van de zon is. Dit is het meest overtuigende bewijs voor het bestaan van een zwart gat.

De massa *m* valt weg.

We drukken de snelheid uit in de baanperiode *T* , dan is de snelheid gelijk aan de omtrek gedeeld door de periode, dus $v = 2\pi r/T$. Daarmee hebben we de derde wet van Kepler afgeleid voor kleine massa's in cirkelvormige banen: de verhouding van de derde macht van de straal tot de tweede macht van de periode, geeft de totale massa in het centrum.

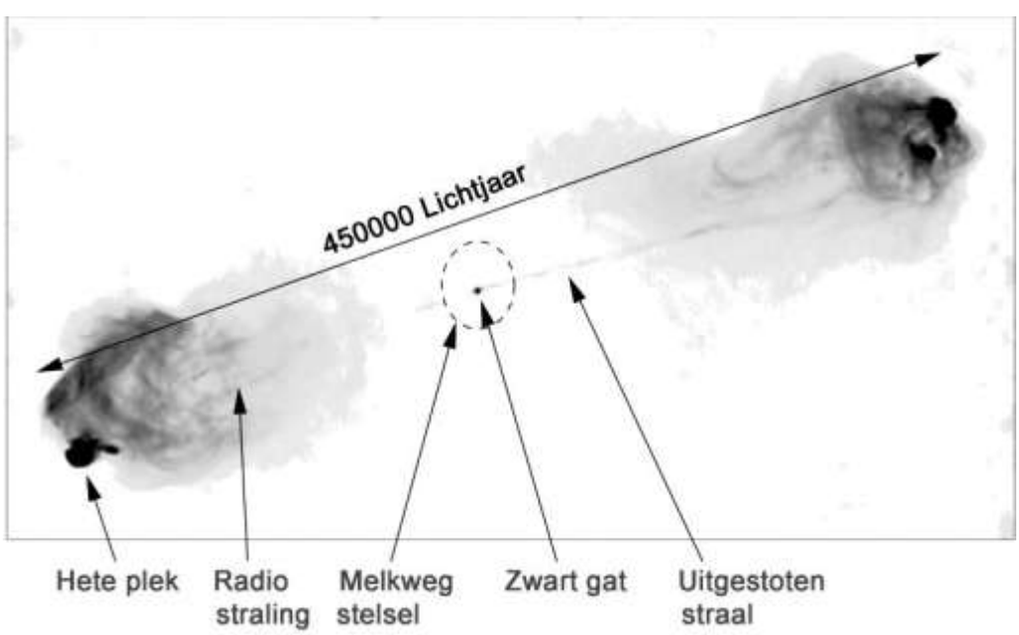
$$\frac{(2\pi)2r^3}{T^2} = GM \tag{10}$$

Drukken we *r* uit in Astronomische Eenheden (afstand aarde-zon), *T* in jaren (omloopstijd aarde om de zon) en *M* in zonsmassa's dan is

$$\frac{r^3}{T^2} = M \tag{11}$$

Met afstand van de ster tot het zwarte gat van 850 AE, en de baanperiode van 15 jaar, kun je de massa van het zwarte gat vaststellen op $\frac{850^3}{15^2} =$ 2,7 miljoen zonmassa's.

4.3 Materie valt naar zwart gat



Figuur 5: De straalstroom van Cygnus A.

Zoals ook al geldt voor neutronensterren (zie VORMING EN ONTWIKKELING VAN COMPACTE STERREN) zijn zwarte gaten te zien als er gas op valt. Dit gebeurt bijvoorbeeld in nauwe dubbelsterren. De straling die we zien is dan afkomstig van het gebied buiten de Schwarzschildstraal, waar het zwaartekrachtsveld sterk is.

Het opvallende gas wordt zo sterk verhit dat het gaat gloeien. Volgens de verschuivingswet van Wien $\lambda_{maxT} = k_W$ is de golflengte waar de meeste straling

wordt uitgezonden afhankelijk van de temperatuur: hoe hoger de temperatuur hoe korter de golflengte.

Sterren van ~ 4.000 *K* zijn **rood**gloeiend, sterren van ~ 6.000 *K* zijn **wit**gloeiend, sterren van ~ 10.000 *K* zijn **blauw**gloeiend, en een zwart gat met $T \sim 10.\ 10^6\ K$ is **röntgen**gloeiend.

Opgave 8: Röntgengloeiend gas

Het gas dat op een stellair zwart gat valt, gloeit niet in het zichtbare licht maar in het röntgen. Gebruik de Wet van Wien om na te gaan of dit klopt.

Een voorbeeld van een zwart gat waargenomen door de straalstroom die geproduceerd kan worden door wegblazen (via de stralingsdruk) van opvallende materie zie je in fig. 5. Dit is Cygnus A, de helderste radiobron aan de hemel in het sterrenbeeld Cygnus (de Zwaan). De straalstroom is ontstaan in het zwarte gat in het centrum van een melkwegstelsel, die binnen de cirkel te zien is in optische straling. De straalstroom, waarin materie een snelheid heeft van ongeveer de halve lichtsnelheid, strekt zich uit over zeer grote afstanden en komt in wervelingen tot stilstand door botsing met ijl gas in de ruimte.

5 Wat gebeurt er met je in de buurt van een zwart gat?

Eenmaal in een zwart gat kun je niet ontsnappen. Maar wat gebeurt er als je alleen maar in de buurt van een zwart gat bent? En wanneer wordt het gevaarlijk en val je onherroepelijk de diepte in?

5.1 Cirkelen

De snelheid v_{cirk} van een kleine massa *m* in een cirkelbaan rond een grote massa *M* volgt eenvoudig door de centripetale kracht nodig om de massa met snelheid *v* in een cirkel met straal *r* te laten bewegen, gelijk te stellen aan de gravitatiekracht op die afstand, dus v_{cirk} volgt uit

$$\frac{mv_{cirk}^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{12}$$

dus, we laten het kwadraat even staan

$$v_{cirk}^2 = \frac{GM}{r} \tag{13}$$

Merk op dat v_{cirk} zelf dus $\sqrt{2}$ keer kleiner is dan de ontsnappingssnelheid vanaf dezelfde straal *r* (formule 7).

Houden we rekening met het feit dat de centripetale kracht mv^2/r bij een snelheid v van een massa m in een baan met straal r niet onbeperkt groot kan worden omdat de snelheid niet groter kan zijn dan de lichtsnelheid, dan kunnen we daarmee begrijpen dat er een kleinste straal r is waarin het nog net wel mogelijk is. Bij nog kleinere straal domineert de gravitatiekracht en zal materie in een spiraal snel verder naar binnen vallen. De precieze waarde van de straal van de kleinste stabiele cirkelbaan blijkt uit een berekening in de Algemene Relativiteitstheorie en blijkt drie keer de Schwarzschildstraal R_s te zijn.

Opgave 9: De kleinste cirkelbaan

Bereken zelf wat de kleinste cirkelbaan zou zijn zonder relativiteit: bij welke straal wordt volgens vergelijking 13 de omloopsnelheid van een satelliet even groot als de lichtsnelheid?

Een ruimteschip in een cirkelbaan rond een zwart gat kan (net als planeten) daar eeuwig blijven rond draaien zonder extra kracht te hoeven aanwenden zolang de straal van zijn baan groter is dan $3R_s$. Pas bij een kleinere baan laat een zwart gat zijn 'extra' gravitatiekracht merken en wordt een ruimteschip zonder motoren naar binnen gezogen. Met extra raketmotoren kan het ruimteschip zich nog wel handhaven. Communicatie met de basis op aarde blijft ook mogelijk, omdat de ontsnappingssnelheid daar (op een afstand groter dan R_s) kleiner is dan de lichtsnelheid.

De versnelling van de gravitatiekracht g die een stilstaand ruimteschip ondergaat op afstand r van het zwarte gat met massa M, blijkt te zijn:

$$g = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2 r}}}\frac{GM}{r^2} \qquad (14)$$

Opgave 10: De "klassieke limiet"

Laat zien dat voor afstanden r veel groter dan de Schwarzschildstraal R_s dit gelijk is aan de klassieke formule voor g

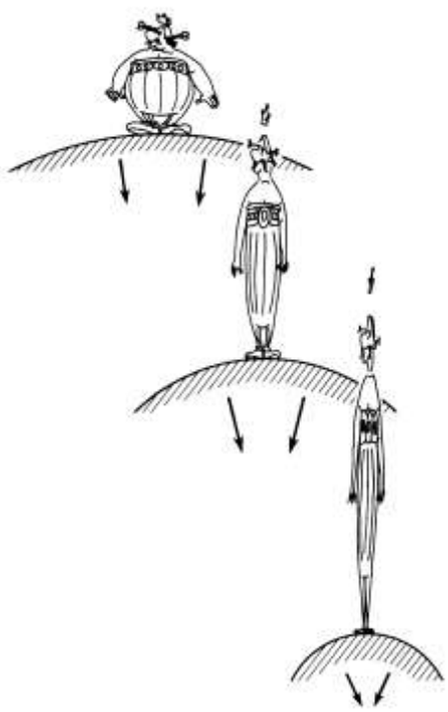
De kracht die het ruimteschip moet aanwenden om zich op een vaste positie te handhaven, wordt steeds groter naarmate de afstand r dichter bij de Schwarzschildstraal komt. Op die grens, de horizon, zou de kracht oneindig groot moeten zijn. Vanaf dat moment is het ruimteschip echt reddeloos verloren en stort steeds verder in het zwarte gat. Zijn hulpgeroep bereikt de aarde niet meer, maar valt mee in het zwarte gat.

5.2 Vallen

Stel dat een capsule uit de ruimte heel ver weg recht naar de aarde begint te vallen, aanvankelijk slechts langzaam. De gravitatiekracht van de aarde geeft de capsule een versnelling. De vrije-valbeweging (zoals bijvoorbeeld de Apollo-cabine net weg van de maan) zal dus steeds sneller gaan. Zonder dampkring komt de cabine dan aan met dezelfde snelheid (maar dan naar beneden gericht) als de ontsnappingssnelheid bij lancering. Dat moet vanwege behoud van energie: bij vallen wordt de afnemende potentiële energie omgezet in toenemende kinetische energie.

Maar wat als de capsule naar een zwart gat valt? We zien al een probleem ontstaan bij de Schwarzschildstraal. Naarmate de capsule dichter bij deze straal komt, nadert de snelheid dichter tot de lichtsnelheid.

In het algemeen geldt: krijg je uit een klassieke redenering (bijvoorbeeld gebruik makend van de wet van Newton) een snelheid groter dan de lichtsnelheid dan is het resultaat fout en moet je een relativistische theorie gebruiken. In dit geval de zwaartekrachttheorie die de Algemene Relativiteitstheorie heet. Bekijk je de vrije val vanaf een afstand dan moet je rekening houden met de tijddilatatie en neemt de waargenomen snelheid af tot nul naarmate het object in vrije val dichter bij de Schwarzschildstraal komt. Het duurt oneindig lang (gezien vanaf de aarde) voordat je daar aankomt.



Figuur 6: Obelix valt in een zwart gat

Zit je zelf in de capsule in vrije val recht naar een zwart gat toe, dan blijkt het resultaat uit de relativiteitstheorie een geheel andere te zijn. Je snelheid neemt steeds meer toe en komt steeds dichter bij de lichtsnelheid maar zal daar nooit boven komen. Je komt daar na een uiterst korte val tijd onherroepelijk om het leven. Dit verschil in visie voor twee verschillende waarnemers is kenmerkend voor de relativiteitstheorie Wat voor de aardse waarnemer oneindig lang duurt, blijkt voor de piloot van de capsule een eindige tijd te zijn.

6 Een zwart gat als energiebron?

6.1 Energie in een cirkelbaan

Wat is de totale energie van een planeet een baan rond de zon, of van een materie deeltje in een cirkelbaan rond een zwarte gat? Die kwestie is voor ons belangrijk, omdat dat de energie is die vrijkomt als materie vanaf grote afstand in een nauwe baan rond een zwart gat lopen. De kinetische energie van een massa in een cirkelbaan bij de snelheid v_{cirk} wordt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{cirk}^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} \qquad (15)$$

Merk op dat dit (in absolute waarde) de helft is van de gravitatie-energie[3]. De gravitatie-energie E_{gr} in die baan op afstand r is $-GM/r$. De totale energie $E_{tot} = E_{kin}+E_{gr}$ wordt dan (uitgedrukt in M en r):

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{gr} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r} \quad \text{totale energie} \qquad (16)$$

Negatief natuurlijk want de planeet met massa m is gebonden aan de massa M. Als een massa m van ver (totale energie nul) komt en in een cirkelbaan terecht komt dan is dit dus de energie die vrijkomt. Het is maar de helft van de potentiële energie omdat de andere helft gaat zitten in de snelheid in zijn baan. Dit is de energie die we vrij kunnen krijgen door massa naar een zwart gat te gooien! En dat kan een heleboel zijn. Een zwart gat kan een belangrijke energiebron zijn, als er tenminste materie heenvalt.

[3] De relatie $Epot + 2Ekin = 0$, zoals hier voor een cirkelbaan, blijkt heel algemeen te gelden voor systemen in evenwicht en heet het viriaaltheorema.

6.2 Zwart gat als energiebron

De aarde, de zon en ieder object in het heelal dat gravitationeel gebonden is (een negatieve bindingsenergie heeft) kan ook een bron van energie zijn, eenvoudig doordat er iets op kan vallen dat heet wordt en gaat stralen, bijv. het lichtspoor van een meteoriet. Als de snelheid van bijvoorbeeld de Apollocabine ver weg nul is, dan is de snelheid waarmee de cabine op aarde komt gelijk aan de ontsnappingssnelheid. Het is het omgekeerde proces als bij een raketlancering: een grote potentiële energie ver weg wordt omgezet in een grote kinetische energie op aarde. Daarom waren een hitteschild en parachutes nodig om die energie kwijt te raken en de cabine af te remmen voor een zachte landing. Een zwart gat kan de meeste energie produceren met behulp van opvallende materie, als het ons lukt om materie zo dicht mogelijk bij het zwarte gat te krijgen. Immers bij kleine R is de totale energie in formule 17 het grootst. De kleinst mogelijke cirkelbaan met straal r is voor $r = 3.R_s = 6GM/c^2$. Vullen we deze waarde in voor de totaal vrij te maken energie in formule 17 dan is de maximum energieproductie E_{max} van een zwart gat

$$E_{max} = \frac{1}{12} mc^2 \qquad (17)$$

Een zwart gat kan theoretisch meer dan 8% van de rustmassa-energie mc^2 van opvallende materie met een massa m omzetten in energie. Dat is heel veel! Veel meer bijvoorbeeld dan de efficiency waarmee in de zon kernfusieprocessen plaatsvinden. Kernfusie levert maximaal ongeveer 0.7% op.

Opgave 11: zwart gat als energiebron in een energiecentrale op aarde.

Bij de val van materie op een zwart gat (accretie genoemd) kan energie vrijkomen. Een val tot 3 keer de Schwarzschildstraal geeft het maximum aan vrijgekomen energie. De rest (materie + energie) valt mee naar het zwarte gat en zien we niet meer.

a Waar blijft de rest van de energie van de opvallende materie?

b Van materie dat op een zwart gat valt[4], komt 8% vrij[5] van de totale energie volgens de formule $E = mc^2$ bij een val tot 3x de Schwarzschildstraal. Dat is aanzienlijk meer dan bij kernfusie op de Zon vrijkomt. Dit percentage is hetzelfde voor ieder zwart gat en is onafhankelijk van de grootte van het zwarte gat! Dus hetzelfde voor een theoretisch zwart gat van 1.000 kg en een superzwaar zwart gat van 1 miljard zonnemassa's. Kan men met de huidige technieken zo'n zwart gat van 1.000 kg maken? Denk je dat een energiecentrale op Aarde op een zwart gat van 1.000 kg kan werken?

c Wat bepaalt het uitgestraalde vermogen (energie per seconde)? Is dit wel of niet afhankelijk van de massa van het zwarte gat?

d Waardoor wordt het uitgestraalde vermogen beperkt? Is deze beperking wel of niet afhankelijk van de massa van het zwarte gat?

[4] De vrijgekomen energie van materie die van ver valt op een bol met massa M en straal R is GM/R per kilogram materie. Dat heet de potentiële energie. De val van m kilogram levert dus m keer zoveel.

[5] Het percentage van 8% is als volgt eenvoudig af te schatten. De Schwarzschildstraal is $2GM/c^2$. Vul 3x deze waarde in in de uitdrukking voor de potentiële energie en je krijgt 1/6 c^2 per massa-eenheid. De helft hiervan zit in de Keplersnelheid van de baan op 3x de Schwarzschildstraal en de andere helft, dus 1/12 mc^2 voor massa m, komt vrij in de vorm van straling uit het verhitte gas. 1/12 is ongeveer 8%. mc^2 wordt de rustmassa-energie genoemd van de hoeveelheid materie van massa m.

7 Afsluiting

We begonnen dit hoofdstuk met de volgende vraag:

Wat zijn zwarte gaten en hoe gedragen ze zich?

Kijk terug op het hoofdstuk aan de hand van de volgende punten.

- Welke antwoorden heb je gevonden op de centrale vraag?
- Waarin verschillen zwarte gaten van de 'gewone' compacte sterren
- Wat zou je over zwarte gaten nog meer willen weten of uitzoeken als je daarvoor tijd zou hebben?

7.1 Niet behandeld, ook interessant

Algemene Relativiteit Deze theorie kun je samenvatten in twee beweringen: (1) materie veroorzaakt een kromming in de tijdruimte en (2) testdeeltjes, zoals astronauten en planeten volgen de meest rechte weg in die tijdruimte. Deze rechte wegen worden geodeten in de tijdruimte genoemd. Een puur ruimtelijk voorbeeld is een bol. Op een bol is een geodeet de meest rechte weg tussen twee punten: een grote cirkel. Het is de kortste weg die een vliegtuig kan nemen.

De gevolgen van Algemene Relativiteit zijn

1. de gravitatieroodverschuiving van licht en de verwante tijddilatatie: het langzamer lopen van klokken in een gravitatiekrachtsveld

2. de afbuiging van licht aan massa en

3. de baan van een planeet heeft niet meer exact de ellipsvorm met een constante lange as, maar de lange as van de ellips gaat draaien.

Deze gevolgen zijn getest. Ze heten de drie klassieke testen van de Algemene Relativiteit.

Omdat het gravitatieveld van een zwart gat zo sterk is, zijn de gevolgen van de Algemene Relativiteitstheorie het best te merken vlak bij een zwart gat.

Ronddraaiende gaten Zwarte gaten kunnen behalve een massa M ook een impulsmoment L hebben ("roterende zwarte gaten") en theoretisch ook een elektrische lading Q. De drie getallen M, L en Q specificeren een zwart gat volledig, er is geen verdere structuur. *A black hole has no hair*. Het zijn in dat opzicht net elementaire deeltjes: ook een elektron wordt uitsluitend gekenmerkt door massa, spin en lading. De kleinste stabiele cirkelbaan rond roterende zwarte gaten is kleiner dan $3R_s$ voor een baan in dezelfde richting als de rotatie van het gat. Een roterend zwart gat kan dus een hogere energieproductie hebben.

Quantumeffecten Er bestaat nog geen goede theorie voor de quantumgravitatiekracht, maar alles wijst erop dat door quantummechanische effecten een zwart gat kan "verdampen" waarbij dan de massa afneemt. Deeltjes ontsnappen vlak buiten de horizon alsof het gat een temperatuur heeft, die omgekeerd evenredig is met de massa M. Voor stellaire en superzware zwarte gaten is dit effect volledig verwaarloosbaar, maar voor micro zwarte gaten is het effect wel groot. Doordat de massa afneemt, neemt die effectieve temperatuur toe en in het laatste stadium gaat dat explosief. Een micro zwart gat is dan net een instabiel elementair deeltje.

Wormgaten We weten niet wat er gebeurt als $r \to 0$ in een zwart gat. Dat heet een singulariteit. De krachten die je daar voelt worden oneindig hoog. Er zijn wel suggesties (geen complete theorie!) gedaan om dat punt te verbinden met een ander punt in de ruimte of met een ander heelal. Die combinatie heet

dan een wormgat. Je verdwijnt in het zwarte gat en zou dan ineens elders te voorschijn komen (en daarmee sneller dan het licht reizen en/of terug in de tijd kunnen gaan). Als het al zou kunnen, heb je er in de praktijk niets aan: de oneindig hoge krachten trekken alle materie uit elkaar (zelfs alle atomen, protonen en neutronen) en de onfortuinlijke tijdreiziger komt er uit te voorschijn als uit een gehaktmolen.

7.2 Extra opdrachten

Opgave 12: Technische toepassing Algemene Relativiteit

Tegenwoordig is het corrigeren van klokken voor de hoogte een onderdeel van onze technologische maatschappij. De TomTom in de auto (en ieder ander satellietnavigatiesysteem) werkt alleen als er voor de gravitatietijddilatatie van de satellietklok gecorrigeerd wordt.

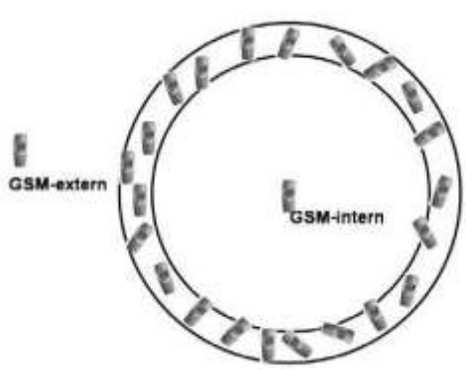
Hoe nauwkeurig moeten je tijdmetingen zijn om met satellietnavigatie een plaatsbepaling te krijgen die tot op 10 meter nauwkeurig is?

Opgave 13: Gedachte-experiment met zwart gat gebouwd uit GSM's.

De ineenstorting van de kern van een supernova tot een zwart gat van 1 Zonsmassa duurt ongeveer 1 milliseconde, maar een vergelijkbaar proces voor 1 miljard Zonsmassa duurt 1 miljard maal 1 milliseconde = 10^6 sec ≈ 1 maand. Tijd genoeg dus voor een gedachte-experiment.

We construeren een grote maar dunne bolvormige schil van materie bestaande uit GSM-telefoons en wel zoveel dat de totale massa 1 miljard Zonsmassa is. Binnen in de schil is het leeg en heerst geen gravitatiekracht omdat de omsloten hoeveelheid materie nul is.

We beginnen (de beginsituatie) met een ring heel ver buiten (zeg 1.000 x) de Schwarzschildstraal. De schil zal onder invloed van zijn eigen gravitatiekracht instorten (niet gehinderd door enige tegendruk). Iedere GSM valt radieel naar het centrum. Tenslotte wordt een zwart gat gevormd (de eindsituatie).



Men kan eenvoudig nagaan dat de dichtheid van GSM-telefoons bij het passeren van de 3x de Schwarzschildstraal en bij het passeren van de Schwarzschildstraal zelf zo laag is, dat de GSMs allemaal nog werken (dat is een illustratie van de lage dichtheden waarbij superzware zwarte gaten gevormd worden).Ver buiten de schil staat een GSM-extern die met alle andere GSMs kan bellen (in ieder geval in de beginsituatie). In het centrum staat een GSM-intern die met alle ander GSMs kan bellen (in ieder geval in de beginsituatie).

a Hoe groot is de Schwarzschildstraal van de schil GSMs in km en uitgedrukt in Astronomische Eenheden (afstand Aarde-Zon) in de beginsituatie en in de eindsituatie?

b Wat is het verschil tussen het stadium voor en na het passeren van 3x de Schwarzschildstraal (maar wel buiten de Schwarzschildstraal)? Met welke telefoons in de schil kunnen we met de GSM-extern bellen? Kunnen de telefoons in de schil met de GSM-intern bellen?

c Wat is het verschil tussen het stadium voor en na het passeren van de Schwarzschildstraal? Met welke telefoons in de schil kunnen we met GSM-extern en met welke kunnen we met GSM-intern bellen?

d Kan je met een GSM na het passeren van de Schwarzschildstraal met je buurman (meest nabije GSM) bellen?

Opgave 14: Massa van het zwarte gat in het centrum van de Melkweg.

Een lichte ster S2 (zie fig. 4) met verwaarloosbare massa draait om iets heel zwaars in het centrum van de Melkweg in een baan met periode van 15 jaar, de halve lange as van de ellipsbaan is R = 1.000 Astronomische Eenheden AE (afgerond getal; slechts 5 keer meer dan de baan van Pluto; 1 AE is afstand Aarde-Zon). De ster S2 in het plaatje van het centrum van de Melkweg, staat het meest dichtbij. In het plaatje staan de posities van de ster in verschillende jaren met een stip aangegeven, terwijl een kruis de onnauwkeurigheid in die positie geeft. De precieze gegevens van baanperiode en straal van de baan leiden tot een zwart gat van bijna 3 miljoen Zonsmassa's.

a Hoe groot is de Schwarzschildstraal van dit zwarte gat in Astronomische Eenheden? Hoe ver staat de ster van het zwarte gat uitgedrukt in Schwarzschildstralen? Komt de ster dus in de buurt van de grens van 3x de Schwarzschildstraal? Wat gebeurt er met een ster die wel binnen 3x de Schwarzschildstraal terecht komt?

b We willen graag een ster ontdekken die dichter bij het zwarte gat staat (een zwakker ster, anders zou hij nu al op de foto te zien zijn). Maak een schatting op het oog hoeveel kleiner die baan kan zijn vergeleken met S2? [Gebruik daarvoor dezelfde onzekerheden als die in het plaatje staan]. Wat is dus uitgedrukt in Schwarzschildstralen de kleinste baan die we met de huidige nauwkeurigheden van de positiebepaling kunnen waarnemen? De (derde) wet van Kepler zegt dat de massa M (in Zonsmassa's) van het zware object gegeven wordt door $M = R^3/T^2$ als de massa uitgedrukt wordt in Zonsmassa's, de straal R in AE's en de periode T in jaren. Voor de Aarde is R = 1 AE en is T = 1 jaar en dat geeft inderdaad 1 Zonsmassa.

c Hoe groot zou de massa van het zwarte gat zijn als T = 10 jaar en R = 1.000 AE en wat is de Schwarzschildstraal in AE's?

d Terug naar het zwarte gat van 3.10^6 zonmassa's. We zouden graag een ster zoeken die dichter bij het zwarte gat komt. Dichter bij dan 3x de Schwarzschildstraal kan niet, dus zeg dat we graag een ster zoeken op een afstand van 10x de Schwarzschildstraal (Rond het getal af tot iets eenvoudigs uitgedrukt in AE). De gevolgen van de Algemene Relativiteitstheorie voor zo'n nauwe baan zijn enorm groot en dat willen we graag verifiëren (bijvoorbeeld bij een ellipsbaan de verdraaiing van de as van de ellips: de zgn. peri-astron verschuiving of bij een planeet om de zon de perihelium verschuiving). Welke periode heeft die ster?

e Neem even aan dat de baan cirkelvormig is, leidt uit de omloopperiode en de omtrek van de baan de snelheid af in km/sec. Hoe groot is de Dopplerverschuiving van de spectraallijnen in de ster als het baanvlak in de kijkrichting staat?

Opgave 15: Zwart gat in botsingskoers met de aarde.

Als een brok materie ter grootte van de Mount Everest (zeg 2.10^{14} kg; de massa van de zon is 2.10^{30} kg) in de vorm van een planetoïde op botsingskoers met de aarde ligt, dan zit de mensheid in grote problemen. Maar zo'n ding zie je aankomen en wellicht valt er wat aan te doen. Wat als een mini zwart gat met dezelfde massa op de aarde afkomt?

a Wat is de Schwarzschildstraal van dit mini zwarte gat?

b Hoeveel energie kan die produceren in de val door de aarde? Dat is de energie van materie die van ver valt naar de meestgebonden cirkelbaan op 3x de Schwarzschildstraal. Die energie berekenen we in twee stappen.

1. De bewegingsenergie van de cirkelbaan van een kleine massa m rond een centraal object van grote massa M is $\frac{1}{2}mv^2$. De snelheid in een cirkelbaan volgt uit het gelijkstellen van de centripetale kracht mv^2/r aan de gravitatiekracht GMm/r^2. Doe dit en vind een formule voor de bewegingsenergie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ in een cirkelbaan uitgedrukt in M en r.

2. De potentiële energie E_{pot} in die baan op afstand r is $-GM/r$. Wat is de totale energie $E_{tot} = E_{kin}+E_{pot}$ uitgedrukt in M en r? Als het goed is vindt je een negatief getal: de bindingsenergie van de massa in de cirkelbaan, die groter is dan de pure potentiële energie vanwege de snelheid in de baan. Dat is dus de energie die vrijkomt als iets van grote afstand tenslotte in een cirkelbaan op afstand r terecht komt.

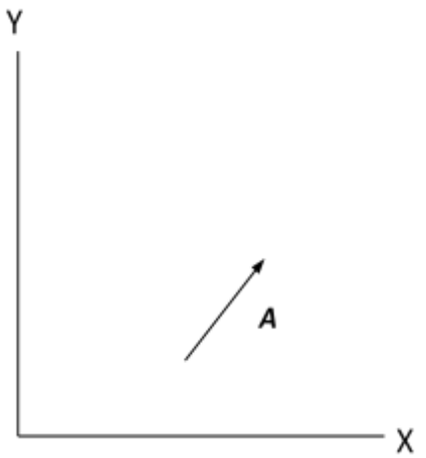
3. Zeg dat alle materiaal en energie die binnen een straal van 3 keer de Schwarzschildstraal R_s (met $R_s = 2GM/c^2$) komt door het zwarte gat wordt opgeslokt. Hoeveel is dan de vrijgekomen energie van materiaal (massa m) in zijn val tot 3xR_s? Je krijgt een percentage uitgedrukt in de rustmassa-energie mc^2

c Als je het vorige onderdeel niet beantwoord hebt, neem dan een percentage van 10%. Zeg dat alle materiaal dat binnen een straal van 3x de Schwarzschildstraal komt door het zwarte gat wordt opgeslokt en energie produceert met een efficiency van 10%. Als m de totale massa is die opgeslokt wordt, dan is de energieproductie dus 10% van $E = mc^2$ (met $c = 3.10^8$ m/s, met m in kg, krijg je E in joule). Schat m als de massa in een cilinder met straal 3x de Schwarzschildstraal en totale lengte gelijk aan de straal van de aarde (6.000 km). Neem als gemiddeld soortelijk gewicht 5.000 kg/m^3 (steen heeft 3.000 kg/m^3 maar dieper is het dichter).

d Wat denk je op basis van je antwoord op het vorige onderdeel: zal de mensheid dit overleven?

BIJLAGE 1 VECTOREN

1. Wat is een vector?



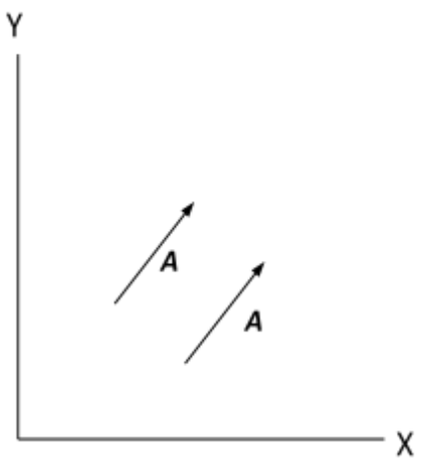
Figuur 1: Verplaatsing als vector

In fig. 1 is in het X-Y-vlak een pijl ***A*** getekend. Deze pijl geeft een verplaatsing in het X-Y-vlak weer. Zo'n verplaatsing heeft een *grootte* en een *richting*. De getekende verplaatsing gaat vanaf het begin van de pijl tot aan het einde ervan. We noemen zo'n grootheid die een grootte en een richting heeft een *vector*.

vector

We kunnen deze vector ook parallel aan zichzelf verschuiven in het vlak. Noch de grootte, noch de oriëntatie wijzigt daardoor. Het blijft dezelfde vector. Zo'n vector noemen we een *vrije vector* (zie fig. 2).

vrije vector



Figuur 2: Parallelle verplaatsing vrije vector

Er zijn ook vectoren die aan een bepaald punt in de ruimte gebonden zijn.
De snelheid van de wind kan op verschillende plaatsen anders zijn. De vector die de windsnelheid aangeeft behoort dan bij een bepaald punt. Zo'n vector

gebonden vector

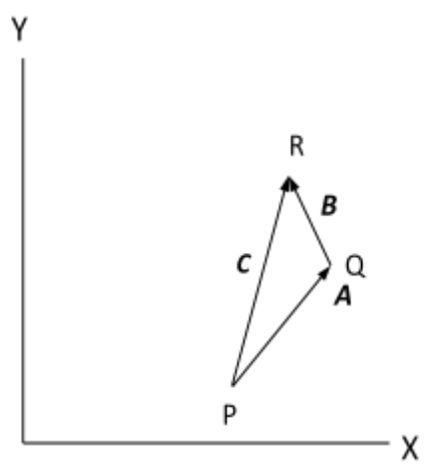
noemt men een *gebonden vector*. Meestal hebben we te maken met gebonden vectoren.

We kunnen door middel van een pijltje boven een letter aangeven dat we met een vector te maken hebben. Maar ook kunnen we de letter **vet** drukken. In dit studieboek kiezen we voor die laatste methode.

Andere voorbeelden van vectoren zijn:

Snelheid ***v***
Versnelling ***a***
Kracht ***F***
Elektrische veldsterkte ***E***

In fig. 3 is een verplaatsing PQ getekend met vector ***A***. Een tweede verplaatsing gaat met vector ***B*** van Q naar R.



Figuur 3: Verplaatsing met twee vectoren

Je kunt ook direct van P naar R gaan met vector ***C***. Er geldt dus blijkbaar

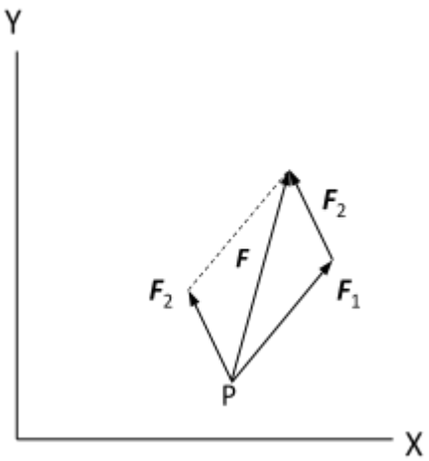
$$\boldsymbol{C = A+B} \qquad (1)$$

Opgave 1: Teken vanuit punt P eerst de vector ***B*** en dan de vector ***A***.

We zien dat ook geldt

$$\boldsymbol{C = B+A} \qquad (2)$$

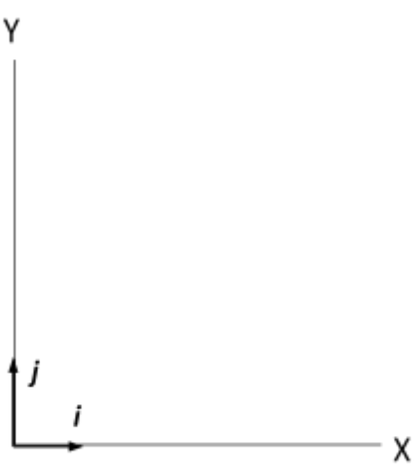
In fig. 4 zijn twee gebonden vectoren $\boldsymbol{F}_1$ en $\boldsymbol{F}_2$ getekend, beide zijn krachten die aangrijpen op een massamiddelpunt P van een lichaam. Er ontstaat een resulterende kracht ***F*** die de som is van beide krachtvectoren.
In fig. 4 tekenen we de resultante die op de zelfde wijze tot stand komt als bij de verplaatsingsvectoren. Beide krachten maken een parallellogram waarbij de diagonaal overeenkomt met de resultante.



Figuur 4: Optellen van vectoren - parallellogram

2. Eenheidsvectoren

In een tweedimensionaal vlak met het coördinatenstelsel X-Y kunnen we *eenheidsvectoren* tekenen. Deze vectoren hebben per definitie een grootte gelijk aan 1 en zijn gericht langs de x-richting en de y-richting.
Langs de x-richting ligt de vrije vector ***i*** en langs de y-richting de vrije vector ***j*** (zie fig. 5). Wanneer we in een driedimensionale ruimte werken komt er natuurlijk een derde vector ***k*** bij, die langs de z-as ligt.

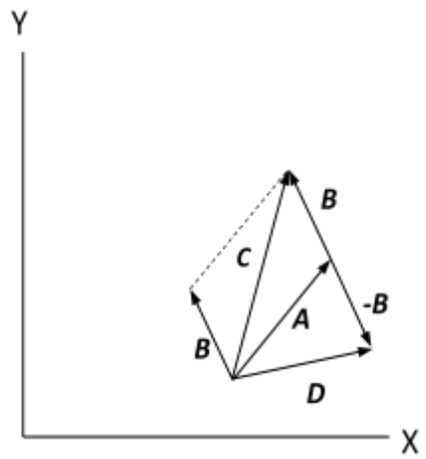


Figuur 5: Eenheidsvectoren langs x- en y-as

Een vector kan met een natuurlijk getal α vermenigvuldigd worden. Stel α=2.
Dan betekent α***A*** een vector die tweemaal zo groot is maar waarvan de richting niet verandert. Als we α=−1 nemen dan betekent de volgende uitdrukking

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B}$$

dat vector ***B*** van vector ***A*** wordt afgetrokken. In fig. 6 zien we dit getekend. Tevens is nog eens vector ***C***, de som van ***A*** en ***B*** getekend



Figuur 6: Vector ***D*** is ***A***-***B***

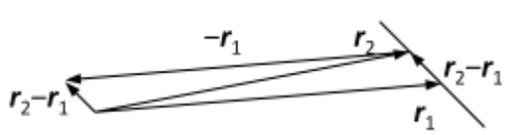
Iedere vector heeft in een gegeven coördinatenstelsel x-, y- en z-componenten.
Laten we aannemen dat we een gebonden vector ***A*** hebben.
De vector ***A*** kan nu worden samengesteld op de volgende manier. We vermenigvuldigen de eenheidsvector ***i*** met A_x en de eenheidsvector ***j*** met A_y.
De beide vectoren verplaatsen we naar het aangrijpingspunt van ***A*** en tellen ze bij elkaar op.

$$\boldsymbol{A} = A_x \,.\boldsymbol{i} + A_y.\boldsymbol{j} \qquad (3)$$

De numerieke waarde van de componenten is afhankelijk van het coördinatenstelsel waarvoor we kiezen. Stel dat het X-Y-stelsel geroteerd wordt en dat de vector natuurlijk zijn ligging in het vlak behoudt. Dan zien we dat de componenten een andere waarde krijgen.
Vectorberekeningen zijn in principe onafhankelijk van het coördinatenstelsel. In de Kepler berekeningen gebruiken we ook die benadering. *Een vectorvergelijking geldt in alle coördinatenstelsels.*

vectorvergelijking geldig in alle coördinatenstelsels

3 Plaatsvectoren en afgeleiden



Figuur 7: plaatsvectoren

Een vector kan ook een bepaald plaats in de ruimte aanwijzen. In fig. 7 wijzen de vectoren $\boldsymbol{r}_1$ en $\boldsymbol{r}_2$ naar de positie die een planeet op de tijdstippen t_1 en t_2 heeft. We construeren de verschilvector $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Deze vector geeft de weg aan waarover de planeet zich in $\Delta t = t_2 - t_1$ heeft verplaatst.

$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ is een snelheidsvector. Er geldt

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (4)$$

4 Het vectorieel inproduct

In het bovenstaande hebben we gezien dat we een vector kunnen optellen, aftrekken en differentiëren en dat we dan ook weer een vector krijgen.
Is het ook mogelijk om vectoren met elkaar te vermenigvuldigen?
Men heeft het volgende vectorproduct gedefinieerd (voor drie dimensies)

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_zB_z \qquad (5)$$

Men noemt dit het vectorieel inproduct. Het levert geen vector op maar een getal. Een voorbeeld is de arbeid W die een kracht $\boldsymbol{F}$ verricht bij verplaatsing over een weg $\boldsymbol{s}$.

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{s}$$

Of wanneer de weg niet mooi recht is en de kracht kan variëren:

$$W = \int F ds$$

Stel dat we het coördinatenstelsel zo kiezen dat $\boldsymbol{A}$ langs de x-as ligt. Er zijn dan geen componenten van $\boldsymbol{A}$ in de y- of z-richting. Vgl. 5 gaat dan over in

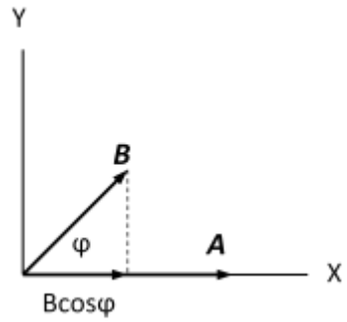
$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_x.B_x$$

Dit is de lengte van $\boldsymbol{A}$ vermenigvuldigd met de component van $\boldsymbol{B}$ in de x-richting. En dat is B cos φ, waarbij φ de hoek is tussen de twee vectoren.

We kunnen dan schrijven

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = AB\cos\varphi \qquad (6)$$

A en B zijn de lengtes van de vectoren.
Als dit waar is in dit speciaal gekozen coördinatenstelsel is het ook waar in ieder ander stelsel. Zie fig. 8.



Figuur 8: Het inproduct van twee vectoren

Het inproduct van eenheidsvectoren, zoals $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}$, kunnen we zo berekenen. Controleer dat.

	i	***j***	***k***
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

5 Het vectorieel uitproduct

Een tweede definitie voor een vector product is wat ingewikkelder. Dit product levert wel een nieuwe vector op. Deze nieuwe vector ***C*** staat loodrecht op het vlak dat de twee vectoren ***A*** en ***B*** die met elkaar vermenigvuldigd worden opspannen. We gaan uit van de volgende definitie.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \equiv (A_yB_z - A_zB_y)\,\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\boldsymbol{k} \qquad (7)$$

Deze uitdrukking is niet gelijk aan ***C*** = ***B*** x ***A*** want als ***A*** wordt ***B en B*** wordt ***A*** wordt bijvoorbeeld C_z gelijk aan $B_xA_y - B_yA_x$. Het teken verandert. Er geldt daarom

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

Voor de lengte in het kwadraat van de productvector ***C*** geldt:

$$\|\boldsymbol{AxB}\|^2 = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)^2 \qquad (8)$$

We kunnen deze uitdrukking uitwerken en zien dat deze gelijk is aan

$$\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right)^2 \qquad (9)$$

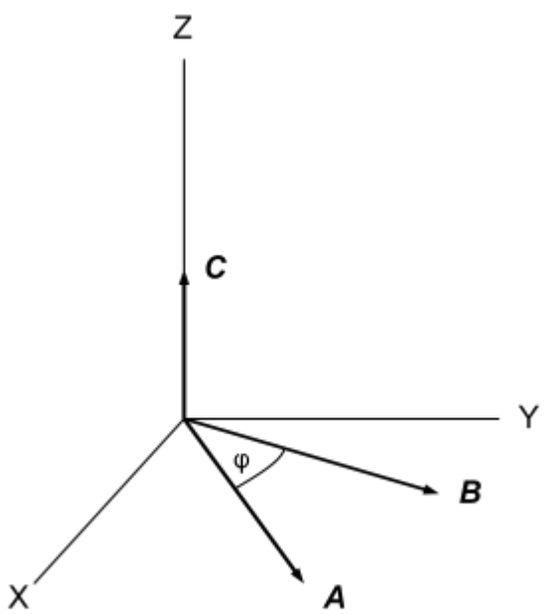
Opgave 2: controleer dit

Hier staat niet anders als:

$$\|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{B}\|^2 - \|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{B}\|^2 cos^2\varphi = \|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{B}\|^2 sin^2\varphi \quad (10)$$

φ is de hoek waarover ***A*** naar ***B*** draait. Deze hoek moet kleiner of gelijk aan 180° zijn (zie fig. 9).
We vinden dan voor de grootte van ***C***

$$\|\boldsymbol{AxB}\| = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\sin(\varphi)$$



Figuur 9: Bij het vectorproduct ***C*** = ***A*** x ***B*** draaien we in een rechtshandig coördinatensysteem de vector ***A*** naar de vector ***B*** in het vlak waarin beide liggen. De richting van ***C*** komt overeen met de richting waarin een rechtsdraaiende schroef gaat als deze bovengenoemde draaiing krijgt.

6 Overzicht vector productregels

B **x** ***A*** **= –** ***A*** **x** ***B*** (a)

A x (***B*** + ***C***) = **A** x ***B*** + ***A*** x ***C*** (b)

(α***A***) x ***B*** = α(***A*** x ***B***) (c)

A . (***B*** x ***C***) = (***A*** x ***B***) . ***C*** (d)

A x (***B*** x ***C***) = ***B***(***A*** . ***C***) – ***C***(***A*** . ***B***) (e)

A x ***A*** **=0** (f)

A . (***A*** x ***B***)=0 (g)

BIJLAGE 2

Astronomische en fysische constanten

Astronomische constanten

Zonsmassa	1 $M_\odot$	=	1.9891 x 10^{30} kg
Zonneconstante	S	=	1.365(2) x 10^3 W m^{-2}
Lichtsterkte van de zon	1 $L_\odot$	=	3.839(5) x 10^{26} W
Straal van de zon	1 $R_\odot$	=	6.95508(26) x 10^8 m
Effectieve temperatuur van de zon	$T_{e,\odot}$	≡	$L_\odot/(4\pi\sigma R^2_\odot)^{1/4}$
		=	5777(2) K
Absolute bolometrische magnitude van de zon	M_{bol}	=	4.74
Schijnbare bolometrische magnitude van de zon	m_{bol}	=	– 26.83
Schijnbare magnitude in ultraviolet van de zon	U	=	– 25.91
Schijnbare magnitude in blauw van de zon	B	=	– 26.10
Schijnbare visuele magnitude	V	=	– 26.75
Bolometrische correctie voor de zon	BC	=	– 0.08
Massa van de aarde	1 $M_\oplus$	=	5,9736 x 10^{24} kg
Straal van de aarde straal (evenaar)	1 $R_\oplus$	=	6.378136 x 10^6 m
Astronomische eenheid	1 AU	=	1.4959787066 x 10^{11} m
Licht (Juliaans) jaar	1 ly	=	9.460730472 x 10^{15} m
Parsec	1 pc	=	206264.806 AU
		=	3.0856776 x 10^{16} m
		=	3.2615638 ly (Juliaans)
Siderische dag		=	$23^h56^m04.0905309^s$
Zonnedag		=	86400 s
Siderisch jaar		=	3.15581450 x 10^7 s
		=	365.256308 d
Tropisch jaar		=	3.155692519 x 10^7 s
		=	365.2421897 d
Juliaans jaar		=	3.1557600 x 10^7 s
		=	365.25 d
Gregoriaans jaar		=	3.1556952 x 10^7 s
		=	365.2425 d

Opmerking: Onzekerheden in de laatste cijfers worden aangegeven tussen haakjes. Bijvoorbeeld, de straal van de zon 1 $R_\odot$ heeft een onzekerheid van ± 0.00026 x 10^8

BIJLAGE 2

Astronomische en fysische constanten

Fysische constanten

Gravitationele constante	G	=	$6.673(10) \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Lichtsnelheid (exact)	c	≡	2.99792458×10^{8} m s^{-1}
Permeabiliteit van het vacuüm	μ_0	≡	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}
Permittiviteit van het vacuüm	ε_0	≡	$1/\mu_0 c^2$
		=	$8.854187817... \times 10^{-12}$ F m^{-1}
Electrische lading	e	=	$1.602176462(63) \times 10^{-19}$ C
Elektronvolt	1 eV	=	$1.602176462(63) \times 10^{-19}$ J
Constante van Planck	h	=	$6.62606876(52) \times 10^{-34}$ J s
		=	$4.13566727(16) \times 10^{-15}$ eV s
	$\hbar$	≡	$h/2\pi$
		=	$1.054571596(82) \times 10^{-34}$ J s
		=	$6.58211889(26) \times 10^{-16}$ eV s
Constante van Planck x lichtsnelheid	hc	=	$1.23984186(16) \times 10^{3}$ eV nm
		≈	1240 eV nm
Constante van Boltzmann	k	=	$1.3806503(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}
		=	$8.6173423(153) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}
Constante van Stephan-Boltzmann	σ	=	$2\pi^5 k^4/(15c^2h^3)$
		=	$5.670400(40) \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
Stralingsconstante	α	=	$4\sigma/c$
		=	$7.565767(54) \times 10^{-16}$ J m^{-3} K^{-4}
Atomaire massa eenheid	1u	=	$1.66053873(13) \times 10^{-27}$ kg
		=	931.494013(37) MeV/c^2
Massa elektron	m_e	=	$9.10938188(72) \times 10^{-31}$ kg
		=	$5.485799110(12) \times 10^{-4}$ u
Massa proton	m_p	=	$1.67262158(13) \times 10^{-27}$ kg
		=	1.00727646688(13) u
Massa neutron	m_n	=	$1.67492716(13) \times 10^{-27}$ kg
		=	1.00866491578(55) u
Massa waterstof	m_H	=	$1.673532499(13) \times 10^{-27}$ kg
		=	1.00782503214(35) u

Opmerking: Onzekerheden in de laatste cijfers worden aangegeven tussen haakjes. Bijvoorbeeld, de universele gravitatieconstante, G, heeft een onzekerheid van ± 0.010×10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

BIJLAGE 2

Astronomische en fysische constanten

Fysische constanten

Getal van Avogadro	N_A	=	$6.02214199(47) \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
Gas constante	R	=	$8.314472(15)\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$
Bohr straal	$\alpha_{0,\infty}$	≡	$4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2$
		=	$5.291772083(19) \times 10^{-11}$
	$\alpha_{0,H}$	≡	$(m_e/\mu)\alpha_{0,\infty}$
		=	$5.294654075(20) \times 10^{-11}\ \text{m}$
Rydberg constante	R_∞	≡	$m_e e^4/64\pi^3\varepsilon_0{}^2\hbar^3 c$
		=	$1.0973731568549(83) \times 10^7\ \text{m}^{-1}$
	R_H	≡	$(\mu/m_e)R_\infty$
		=	$1.09677583(13) \times 10^7\ \text{m}^{-1}$